Приложение к журналу

КВАНТ

№ 3/2016

А.В. АРБИТ

НЕРАВЕНСТВА

И ОСНОВНЫЕ СПОСОБЫ ИХ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

ЧАСТЬ 1

Приложение к журналу
«КВАНТ»
№3/2016

А.В. АРБИТ

НЕРАВЕНСТВА И ОСНОВНЫЕ СПОСОБЫ ИХ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

ЧАСТЬ 1

Москва
Издательство МЦНМО
2016

УДК 512
ББК 22.14
А79

Приложение к журналу
«Квант» №3/2016

Арбит А.В.

А79 **Неравенства и основные способы их доказательства. Часть 1.** – М.: Издательство МЦНМО, 2016. – 168 с. (Приложение к журналу «Квант» №3/2016.)

ISBN 978-5-4439-1068-0

Книга содержит различные методы и приемы, используемые при доказательстве неравенств. В нее включены задачи, которые не требуют специальных знаний и подойдут для начинающих изучать неравенства.

Книга предназначена прежде всего учащимся и учителям средних школ, лицеев и гимназий.

ББК 22.14

ISBN 978-5-4439-1068-0

9 785443 910680 >

12+

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Идея создания этой книги возникла в результате многолетней работы с одаренными детьми по подготовке к математическим олимпиадам. Кроме прочих тем, на занятиях со школьниками были изучены различные способы доказательства неравенств, и к моменту написания пособия накопилась значительная подборка заданий по этой теме. Некоторые из этих задач были придуманы лично автором и использовались в олимпиадной подготовке школьников. Первоначально планировалось издать только эти задачи, но затем возникла мысль дополнить их задачами других авторов и создать учебное пособие, которое охватывало бы широкий пласт различных методов и приемов, используемых при доказательстве неравенств. Пособие было решено выпустить в двух частях. В первой части, которую вы держите в руках, собраны задачи, которые не требуют специальных знаний и подойдут для начинающих изучать неравенства. Во второй части будут предложены методы доказательства с использованием дифференциального исчисления, мажорирующих последовательностей, свойств выпуклости и вогнутости функций, предполагающие наличие у читателей более глубоких знаний. В нее войдут такие неравенства, как неравенства Йенсена, Гёльдера, Мюрхеда, Караматы, Шура и другие; будут описаны такие методы доказательства, как метод касательных, метод суммирования квадратов и прочие.

Книга имеет следующую структуру. В начале каждой темы кратко излагается теория и приводятся примеры доказательства неравенств с ее использованием. В конце главы дается список заданий для самостоятельного решения. Отличие этого пособия от многих подобных ему в том, что все задания снабжены подробными решениями, которые приведены отдельно в разделе «Решения». Каждое задание имеет двойной номер: первое число – номер главы, второе – номер задачи в этой главе. В квадратных скобках после номера задачи стоит ссылка на источник, из которого она взята. Буква А в квадратных скобках после задачи указывает на то, что данная задача придумана автором пособия (не исключено, что некоторые из этих задач были также придуманы ранее другими авторами и уже встречались в литературе). Задачи повышенной сложности отмечены звездочкой. Задачи для самостоятельного решения расположены в порядке возрастания уровня их сложности, что дает возможность выбирать для решения задания, соответствующие уровню подготовки читателя. Пособие организовано так, что может быть полезным как руководителям математических кружков и преподавателям факультативов по олимпиадной математике при подготовке занятий, так и самим учащимся для самостоятельной подготовки к участию в математических олимпиадах, а также для расширения научного кругозора.

Автор выражает признательность Е.А.Тимошенко за критические замечания, способствовавшие улучшению этого пособия.

ВВЕДЕНИЕ

В этом разделе будет дано строгое определение неравенств с переменными, которым посвящена настоящая книга. Это определение основано на понятии функции нескольких переменных, которое, хоть и не изучается в рамках школьной программы, необходимо для глубокого понимания изучаемого нами материала.

Определение 1. Неравенством с переменными будем называть любую из символических записей вида

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) > g(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{1}$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) < g(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{2}$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq g(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{3}$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq g(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{4}$$

где $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – обозначения для произвольных вещественнозначных функций (т.е. области значений этих функций есть подмножества множества $\mathbb{R}$ всех действительных чисел) от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, где n – натуральное, причем области определения $D(f)$ и $D(g)$ этих функций имеют непустое пересечение. Так как функции f и g зависят от n переменных, то $D(f)$ и $D(g)$ есть подмножества n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$. Их пересечение называется областью определения данного неравенства. Иными словами, область определения неравенства – это совокупность всех наборов переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при которых оба выражения $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеют смысл. Неравенства (1) и (2) называются строгими, а неравенства (3) и (4) – нестрогими. Для обозначения произвольного неравенства мы также будем использовать запись

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee g(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где символ $\vee$ обозначает один из знаков неравенств >, <, $\geq$ или $\leq$.

Пример 1. Рассмотрим неравенство $x + y \geq 2\sqrt{xy}$.

Здесь $f(x,y) = x + y$, $g(x,y) = 2\sqrt{xy}$. Области определения левой и правой частей − множества $D(f) = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ и $D(g) = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R},\ xy \geq 0\}$ соответственно. Тогда область определения данного неравенства есть множество $D = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R},\ xy \geq 0\}$, что соответствует первой и третьей координатным четвертям координатной плоскости.

Определение 2. Решением неравенства (1) (соответственно (2), (3), (4)) называется любой набор действительных чисел $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$ из области определения данного неравенства, для которого числа $f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$ и $g(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$ удовлетворяют условию

$$f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n) > g(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$$

(соответственно $f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n) < g(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$,

$$f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n) \geq g(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$$

или $f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n) \leq g(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$).

При этом будем говорить, что набор $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$ удовлетворяет данному неравенству. Множество всех решений данного неравенства с переменными называется его областью истинности.

Определение 3. Пусть D − область определения неравенства (1) (соответственно (2), (3) или (4)), и пусть выполнено $A \subset D$. Если найдется такой набор действительных чисел $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n) \in A$, что числовое неравенство $f(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n) > g(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n)$ (соответственно $f(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n) < g(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n)$, $f(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n) \geq g(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n)$ или $f(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n) \leq g(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n)$ неверно, то неравенство (1) (соответственно (2), (3) или (4)) называется опровержимым на множестве A.

Пример 2. Неравенство $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ из предыдущего примера является опровержимым на своей области определения D, так как выполнено $(-1,-1) \in D$ и $-1 + (-1) < 2\sqrt{(-1)(-1)}$. Областью истинности данного неравенства является множество $M = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R},\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$. Действительно, при неотрицательных x и y имеем

$$x + y = \left(x + y - 2\sqrt{xy}\right) + 2\sqrt{xy} = \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 + 2\sqrt{xy} \geq 2\sqrt{xy},$$

так как $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \geq 0$. Если же $x < 0$ и $y < 0$, то $x + y < 0 \leq 2\sqrt{xy}$.

Определение 4. Пусть даны два неравенства (I) и (II), каждое из которых имеет любой из четырех видов (1), (2), (3) или (4), и пусть M_1 и M_2 – их области истинности соответственно. Тогда:

а) Если $M_1 \subset M_2$, то говорят, что неравенство (II) следует из неравенства (I) или что неравенство (I) влечет неравенство (II). При этом пишут $(\mathrm{I}) \Rightarrow (\mathrm{II})$ и называют неравенство (II) следствием неравенства (I).

б) Если $M_1 = M_2$, то говорят, что неравенства M_1 и M_2 равносильны или эквивалентны. При этом пишут $(\mathrm{I}) \Leftrightarrow (\mathrm{II})$.

в) Если $M_1 \subset M_2$ и $M_1 \neq M_2$, то говорят, что неравенство (I) сильнее неравенства (II) или что неравенство (II) слабее неравенства (I).

Переход от рассмотрения одного неравенства к рассмотрению равносильного ему неравенства называется равносильным или эквивалентным переходом.

Очевидно следующее свойство отношений $\Rightarrow$ и $\Leftrightarrow$.

Пусть (I), (II), (III) – неравенства, каждое из которых имеет любой из четырех видов (1), (2), (3) или (4). Тогда

а) если $(\mathrm{I}) \Rightarrow (\mathrm{II})$ и $(\mathrm{II}) \Rightarrow (\mathrm{III})$, то $(\mathrm{I}) \Rightarrow (\mathrm{III})$;

б) если $(\mathrm{I}) \Leftrightarrow (\mathrm{II})$ и $(\mathrm{II}) \Leftrightarrow (\mathrm{III})$, то $(\mathrm{II}) \Leftrightarrow (\mathrm{III})$.

Из этих свойств следует, что если в результате нескольких равносильных переходов от некоторого неравенства с переменными мы придем к неравенству, которое верно для всех наборов переменных из некоторого множества A, то тогда и первоначальное неравенство верно для тех же наборов переменных. Перечислим операции, производимые над произвольным неравенством с переменными, которые осуществляют равносильный переход, т.е. в результате выполнения которых из данного неравенства получается равносильное ему неравенство. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$, $g(x_1,\ldots,x_n)$ и $h(x_1,\ldots,x_n)$ – функции от n переменных $x_1,\ldots,x_n$, причем для областей определения этих функций выполнено условие $\varnothing \neq D = D(f) \cap D(g) \subset D(h)$. Тогда

1) $f(x_1,\ldots,x_n) \vee g(x_1,\ldots,x_n) \Leftrightarrow g(x_1,\ldots,x_n) \wedge f(x_1,\ldots,x_n)$, где пара символов $(\vee, \wedge)$ обозначает пару противоположных знаков неравенства $(>, <)$ или $(\geq, \leq)$;

2) $f(x_1,\ldots,x_n) \vee g(x_1,\ldots,x_n) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x_1,\ldots,x_n) + h(x_1,\ldots,x_n) \vee g(x_1,\ldots,x_n) + h(x_1,\ldots,x_n),$$

где символ $\vee$ каждый раз обозначает один и тот же знак из знаков неравенства $>$, $<$, $\geq$ или $\leq$; в частности,

$$f(x_1,\ldots,x_n)\vee g(x_1,\ldots,x_n)\Leftrightarrow f(x_1,\ldots,x_n)-g(x_1,\ldots,x_n)\vee 0;$$

3) если $h(x_1,\ldots,x_n)>0$ на множестве D, то

$$f(x_1,\ldots,x_n)\vee g(x_1,\ldots,x_n)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x_1,\ldots,x_n)\cdot h(x_1,\ldots,x_n)\vee g(x_1,\ldots,x_n)\cdot h(x_1,\ldots,x_n)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x_1,\ldots,x_n):h(x_1,\ldots,x_n)\vee g(x_1,\ldots,x_n):h(x_1,\ldots,x_n);$$

в частности, если $f(x_1,\ldots,x_n)\cdot g(x_1,\ldots,x_n)>0$ на множестве D, то имеем

$$f(x_1,\ldots,x_n)\vee g(x_1,\ldots,x_n)\Leftrightarrow \frac{1}{f(x_1,\ldots,x_n)}\wedge\frac{1}{g(x_1,\ldots,x_n)};$$

4) если $h(x_1,\ldots,x_n)<0$ на множестве D, то

$$f(x_1,\ldots,x_n)\vee g(x_1,\ldots,x_n)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x_1,\ldots,x_n)\cdot h(x_1,\ldots,x_n)\wedge g(x_1,\ldots,x_n)\cdot h(x_1,\ldots,x_n)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x_1,\ldots,x_n):h(x_1,\ldots,x_n)\wedge g(x_1,\ldots,x_n):h(x_1,\ldots,x_n);$$

5) если k – нечетное натуральное число, то

$$f(x_1,\ldots,x_n)\vee g(x_1,\ldots,x_n)\Leftrightarrow \left(f(x_1,\ldots,x_n)\right)^k\vee\left(g(x_1,\ldots,x_n)\right)^k\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[k]{f(x_1,\ldots,x_n)}\vee\sqrt[k]{g(x_1,\ldots,x_n)};$$

6) если k – четное натуральное число и выполнены неравенства $f(x_1,\ldots,x_n)\geq 0$ и $g(x_1,\ldots,x_n)\geq 0$ на множестве D, то

$$f(x_1,\ldots,x_n)\vee g(x_1,\ldots,x_n)\Leftrightarrow \left(f(x_1,\ldots,x_n)\right)^k\vee\left(g(x_1,\ldots,x_n)\right)^k\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[k]{f(x_1,\ldots,x_n)}\vee\sqrt[k]{g(x_1,\ldots,x_n)}.$$

В некоторых случаях для доказательства некоторого неравенства с переменными бывает удобно доказать более сильное неравенство или систему неравенств, из которых уже будет следовать первоначальное. Перечислим два важных для нас свойства отношения $\Rightarrow$.

1) Пусть имеется k неравенств

$$f_i(x_1,\ldots,x_n)\vee g_i(x_1,\ldots,x_n),\ 1\leq i\leq k,$$

где символ $\vee$ обозначает один и тот же знак из знаков неравенства $>$, $<$, $\geq$ или $\leq$, причем области определения всех функций

f_i и g_i имеют непустое пересечение D; тогда

$$\begin{cases} f_1(x_1,\ldots,x_n) \vee g_1(x_1,\ldots,x_n), \\ f_2(x_1,\ldots,x_n) \vee g_2(x_1,\ldots,x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_k(x_1,\ldots,x_n) \vee g_k(x_1,\ldots,x_n) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_1(x_1,\ldots,x_n) + f_2(x_1,\ldots,x_n) + \ldots + f_k(x_1,\ldots,x_n) \vee$$

$$\vee g_1(x_1,\ldots,x_n) + g_2(x_1,\ldots,x_n) + \ldots + g_k(x_1,\ldots,x_n).$$

2) Если вдобавок к условиям из предыдущего утверждения все функции f_i и g_i неотрицательны на множестве D, то

$$\begin{cases} f_1(x_1,\ldots,x_n) \vee g_1(x_1,\ldots,x_n), \\ f_2(x_1,\ldots,x_n) \vee g_2(x_1,\ldots,x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_k(x_1,\ldots,x_n) \vee g_k(x_1,\ldots,x_n) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_1(x_1,\ldots,x_n) \cdot f_2(x_1,\ldots,x_n) \cdot \ldots \cdot f_k(x_1,\ldots,x_n) \vee$$

$$\vee g_1(x_1,\ldots,x_n) \cdot g_2(x_1,\ldots,x_n) \cdot \ldots \cdot g_k(x_1,\ldots,x_n).$$

Глава 1

МЕТОДЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ НЕРАВЕНСТВ

Перечислим основные способы доказательства неравенств.

1.1. Разложение на множители

Метод состоит в том, чтобы перенести все слагаемые неравенства в левую часть, перейдя к равносильному неравенству вида $f(x_1,\ldots,x_n)\ge 0$ или $f(x_1,\ldots,x_n)>0$ и затем разложить функцию $f(x_1,\ldots,x_n)$) в произведение неотрицательных или положительных множителе.

Задача 1.1. *Докажите, что* $x^3+y^3\ge xy(x+y)$, *где* $x,y\ge 0$.

Решение. Нужно доказать, что $x^3+y^3-xy(x+y)\ge 0$. Но

$$\left(x^3+y^3\right)-xy(x+y)=\left(x^3-x^2y\right)-\left(xy^2-y^3\right)=$$

$$=x^2(x-y)-y^2(x-y)=\left(x^2-y^2\right)(x-y)=$$

$$=\left((x+y)(x-y)\right)(x-y)=(x-y)^2(x+y)\ge 0\,.$$

Задача 1.2. *Докажите, что* $\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+y^2}\le\dfrac{2}{1+xy}$ *для любых* $x,y\in[0;1]$.

Решение. Домножим обе части неравенства на положительный общий знаменатель и перенесем все слагаемые в одну часть. После раскрытия скобок получим

$$2\left(1+x^2+y^2+x^2y^2\right)-\left(1+y^2+xy+xy^3\right)-\left(1+x^2+xy+x^3y\right)=$$

$$=(1-xy)(x-y)^2\ge 0\,,$$

что завершает доказательство исходного неравенства, поскольку $1-xy\ge 0$ и $(x-y)^2\ge 0$.

Задача 1.3. *Пусть* $0<a<b$. *Докажите, что* $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+x}{b+x}$ *для любого положительного* x.

Решение. Домножим обе части этого неравенства на общий положительный знаменатель, перенесем все слагаемые в одну часть и приведем подобные слагаемые. Получим равносильное неравенство $x(b-a)>0$, которое верно в силу того, что левая часть – произведение двух положительных множителей.

1.2. Выделение полного квадрата

В некоторых случаях неравенство вида $f(x_1,\ldots,x_n)\ge 0$ или $f(x_1,\ldots,x_n)>0$ легко доказать, представив $f(x_1,\ldots,x_n)$ в виде суммы квадратов нескольких выражений (или в виде одного квадрата). Иногда перед этим бывает удобно умножить обе части неравенства на некоторое число.

Задача 1.4. *Докажите неравенство* $x+y\ge 2\sqrt{xy}$ *для* $x,y\ge 0$.

Решение. Перенесем все слагаемые в левую часть неравенства и свернем получившееся выражение по формуле квадрата разности, получим равносильное верное неравенство $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\ge 0$.

Задача 1.5. [24] *Докажите, что* $a^2+b^2\ge ab$ *для любых* a *и* b.

Решение. Данное неравенство равносильно неравенству $a^2+b^2-ab\ge 0$. Но

$$a^2+b^2-ab=\left(a^2-ab+\frac{b^2}{4}\right)+b^2-\frac{b^2}{4}=\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}\ge 0.$$

Задача 1.6. [7] *Докажите, что* $x^2+y^2+1\ge x+y+xy$ *для любых* x *и* y.

Решение. Домножим обе части неравенства на 2 и перенесем все слагаемые в левую часть, получим равносильное неравенство $2x^2+2y^2+2-2x-2y-2xy\ge 0$. Но

$$2x^2+2y^2+2-2x-2y-2xy=\left(x^2-2xy+y^2\right)+\left(x^2-2x+1\right)+$$

$$+\left(y^2-2y+1\right)=(x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2\ge 0.$$

1.3. Метод разбиения

Для того чтобы доказать неравенство $f(x_1,\ldots,x_n)\ge$ $\ge g(x_1,\ldots,x_n)$, можно представить обе части неравенства в виде суммы:

$$f(x_1,\ldots,x_n)=f_1(x_1,\ldots,x_n)+\ldots+f_k(x_1,\ldots,x_n),$$

$$g(x_1,\ldots,x_n)=g_1(x_1,\ldots,x_n)+\ldots+g_k(x_1,\ldots,x_n),$$

а затем вместо одного неравенства доказать k неравенств

$$f_i(x_1,\ldots,x_n)\ge g_i(x_1,\ldots,x_n), \qquad (5)$$

где $i\in\{1,2,\ldots,k\}$. Тогда, сложив почленно эти доказанные неравенства, получим исходное. Аналогично и для неравенства вида $f(x_1,\ldots,x_n) > g_i(x_1,\ldots,x_n)$, причем для его доказательства достаточно, чтобы только одно из суммируемых неравенств было строгим.

В других случаях можно представить левую и правую части в виде произведения неотрицательных множителей

$$f(x_1,\ldots,x_n) = f_1(x_1,\ldots,x_n)\cdot\ldots\cdot f_k(x_1,\ldots,x_n),$$

$$g(x_1,\ldots,x_n) = g_1(x_1,\ldots,x_n)\cdot\ldots\cdot g_k(x_1,\ldots,x_n).$$

После этого надо доказать k неравенств вида (5), перемножить эти неравенства и получить исходное.

Задача 1.7. [8] *Докажите неравенство*

$$a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca},$$

где $a,b,c \geq 0$.

Решение. Домножим обе части неравенства на 2 и запишем получившееся равносильное неравенство в виде $(a+b)+$ $+(b+c)+(c+a) \geq 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{bc} + 2\sqrt{ca}$. Разобьем его на три неравенства. Поскольку $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, $b+c \geq 2\sqrt{bc}$, $c+a \geq 2\sqrt{ca}$ (см. задачу 1.4), то, складывая эти неравенства, получаем исходное.

Задача 1.8. *Докажите неравенство*

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc,$$

где $a,b,c \geq 0$.

Решение. Перепишем неравенство в виде $(a+b)(b+c)(c+$ $+a) \geq 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca}$ и разобьем его на три неравенства. Так как $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, $b+c \geq 2\sqrt{bc}$, $c+a \geq 2\sqrt{ca}$ (см. задачу 1.4), то, перемножая эти неравенства, получаем исходное.

1.4. Метод промежуточной оценки

Предположим, что мы хотим доказать неравенство вида $f(x_1,\ldots,x_n) \geq g(x_1,\ldots,x_n)$. Допустим, что удалось доказать неравенство $f(x_1,\ldots,x_n) \geq h(x_1,\ldots,x_n)$, где $h(x_1,\ldots,x_n)$ − некоторая функция n переменных. Если после этого нам удастся доказать неравенство $h(x_1,\ldots,x_n) \geq g(x_1,\ldots,x_n)$, то тем самым будет доказано исходное неравенство. При этом неравенство $f(x_1,\ldots,x_n) \geq h(x_1,\ldots,x_n)$ называется оценкой снизу.

Аналогично для неравенств вида $f(x_1,\ldots,x_n) \leq g(x_1,\ldots,x_n)$: если удалось доказать неравенство $f(x_1,\ldots,x_n) \leq h(x_1,\ldots,x_n)$, а затем $h(x_1,\ldots,x_n) \le g(x_1,\ldots,x_n)$, то тем самым будет доказано исходное неравенство. Неравенство $f(x_1,\ldots,x_n) \le h(x_1,\ldots,x_n)$ называется оценкой выражения $f(x_1,\ldots,x_n)$ сверху.

Если левая часть неравенства представляет собой сумму или произведение некоторых выражений, то можно делать оценку каждого слагаемого или каждого множителя, входящего в левую часть.

Задача 1.9. [24] *Докажите неравенство*

$$1 < \frac{a}{d+a+b} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{c+d+a} < 2$$

для любых положительных a, b, c, d.

Решение. а) Докажем неравенство

$$\frac{a}{d+a+b} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{c+d+a} > 1 .$$

Оценим снизу каждое слагаемое, входящее в левую часть.

$$\frac{a}{d+a+b} > \frac{a}{a+b+c+d}, \quad \frac{b}{a+b+c} > \frac{b}{a+b+c+d},$$

$$\frac{c}{b+c+d} + \frac{c}{a+b+c+d}, \quad \frac{d}{c+d+a} > \frac{d}{a+b+c+d}.$$

Сложив эти четыре неравенства, получим

$$\frac{a}{d+a+b} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{c+d+a} > \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = 1 .$$

б) Докажем неравенство

$$\frac{a}{d+a+b} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{c+d+a} < 2 .$$

Воспользовавшись неравенством задачи 1.3, оценим сверху каждое слагаемое, входящее в левую часть. Имеем неравенства

$$\frac{a}{d+a+b} < \frac{a+c}{(d+a+b)+c}, \quad \frac{b}{a+b+c} < \frac{b+d}{(a+b+c)+d},$$

$$\frac{c}{b+c+d} < \frac{c+a}{(b+c+d)+a}, \frac{d}{c+d+a} < \frac{d+b}{(c+d+a)+b}.$$

Сложив эти неравенства, получим

$$\frac{a}{d+a+b} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{c+d+a} <$$

$$< \frac{(a+c)+(b+d)+(c+a)+(d+b)}{a+b+c+d} = 2 .$$

1.5. Метод подстановки

Этот метод заключается в том, чтобы в уже доказанное неравенство подставить вместо переменных выражения, зависящие от других переменных (или постоянные), и тем самым получить новое верное неравенство.

Задача 1.10. *Доказите неравенство* $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ *для* $a, b > 0$.

Решение. Подставим $\frac{a}{b}$ вместо x и $\frac{b}{a}$ вместо y в уже доказанное нами неравенство из задачи 1.4. Получим требуемое неравенство.

Задача 1.11. [8] *Докажите неравенство* $\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\geq$ $\geq x+y+z$ *для любых* $x, y, z > 0$.

Решение. Воспользуемся методом подстановки. В уже доказанное неравенство из задачи 1.7 подставим $\frac{xy}{z}$ вместо a, $\frac{yz}{x}$ вместо b, $\frac{zx}{y}$ вместо c, где $x, y, z > 0$. Получим требуемое неравенство.

1.6. Замена переменных

Еще один из способов, применяемых в доказательстве неравенств – замена переменных.

Задача 1.12. [8] (Неравенство Несбитта) *Докажите неравенство* $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$ *для* $a, b, c > 0$.

Решение. Введем новые переменные $x = b + c$, $y = c + a$, $z = a + b$, тогда

$$a=\frac{y+z-x}{2},\quad b=\frac{z+x-y}{2},\quad c=\frac{x+y-z}{2}. \tag{6}$$

Поскольку $a, b, c > 0$, то $x, y, z > 0$ и достаточно будет доказать неравенство

$$\frac{y+z-x}{2x}+\frac{z+x-y}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}\geq\frac{3}{2}$$

при $x, y, z > 0$. Заметим, что последнее неравенство более сильное, чем первоначальное, так как не при любых положительных x, y, z числа a, b, c, полученные по формулам (6), будут положительными. Последнее неравенство равносильно

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\geq 6,$$

а оно в свою очередь получается сложением трех верных неравенств $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$, $\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\geq 2$, $\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\geq 2$ (см. задачу 1.10).

Задача 1.13. *Докажите неравенство* $x^3-4x^2-3x+19>0$, *если* $x\geq 3$.

Решение. Сделаем замену переменной $t = x - 3$, тогда $x = t + 3$, где $t\geq 0$, и исходное неравенство запишется как $(t+3)^3-4(t+3)^2-3(t+3)+19>0$. Но

$$(t+3)^3-4(t+3)^2-3(t+3)+19 =$$
$$= t^3+9t^2+27t+27-4\left(t^2+6t+9\right)-3t-9+19 =$$
$$= t^3+5t^2+1>0,$$

так как $t\geq 0$.

Задача 1.14. [10] *Докажите неравенство*

$$-\frac{1}{2}\leq\frac{(x+y)(1-xy)}{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}\leq\frac{1}{2}$$

для любых x, y.

Решение. Перейдем в этом неравенстве к новым переменным α и β, определенным формулами $x=\operatorname{tg}\alpha$, $y=\operatorname{tg}\beta$. Тогда

$$\frac{(x+y)(1-xy)}{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}=\frac{(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)}{\left(1+\operatorname{tg}^2\alpha\right)\left(1+\operatorname{tg}^2\beta\right)}=$$

$$=\frac{\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\cdot\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\beta}}=\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}\sin 2(\alpha+\beta),$$

и исходное неравенство запишется в виде $-\frac{1}{2}\leq\frac{1}{2}\sin 2(\alpha+\beta)\leq\frac{1}{2}$, т.е. $\left|\sin 2(\alpha+\beta)\right|\leq 1$, а это верно.

1.7. Метод упорядочивания переменных

Пусть необходимо доказать неравенство вида $f(x_1,\ldots,x_n)\geq 0$ или $f(x_1,\ldots,x_n)>0$. Если функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ симметрична относительно переменных $x_1,\ldots,x_n$, т.е. ее значение не меняется при перестановке этих переменных, то иногда бывает полезно упорядочить переменные, т.е. считать, что $x_1\leq x_2\leq\ldots\leq x_n$ или $x_1\geq x_2\geq\ldots\geq x_n$.

Задача 1.15. [24] *Докажите, что* $\frac{x}{1+y}+\frac{y}{1+x}\leq 1$, *где* $x,y\in[0;1]$.

Решение. Домножив обе части неравенства на общий знаменатель, после переноса слагаемых в одну часть неравенства и приведения подобных слагаемых получим равносильное неравенство $1-x^2-y^2+xy \ge 0$. Предположим, что $x \ge y$ (другой случай аналогичен). Исходное неравенство будет равносильно $\left(1-x^2\right)+y(x-y) \ge 0$. Последнее неравенство верно, поскольку $1-x^2 \ge 0$, $y \ge 0$ и $x-y \ge 0$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Докажите неравенства:

1.16. $2\left(x^3+y^3\right) \ge (x+y)\left(x^2+y^2\right)$, *где* $x, y \ge 0$.

1.17. [24] *а)* $\left(a^2-b^2\right)\left(a^4-b^4\right) \le \left(a^3-b^3\right)^2$,

б) $\left(a^2+b^2\right)\left(a^4+b^4\right) \ge \left(a^3+b^3\right)^2$ *для любых a и b.*

1.18. [24] $\sqrt{a}+\sqrt{b} \le \sqrt{\dfrac{a^2}{b}}+\sqrt{\dfrac{b^2}{a}}$ *для любых a, b > 0.*

1.19. [24] $\dfrac{a+b}{2} \cdot \dfrac{a^3+b^3}{2} \le \dfrac{a^4+b^4}{2}$ *для любых a, b.*

1.20. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b} \ge \dfrac{4}{a+b}$ *для любых a, b > 0.*

1.21. $\dfrac{a^2+b^2}{a+b} \ge \dfrac{a+b}{2}$ *для любых a, b > 0.*

1.22. [24] $4x^2+3y^2+4z^2+5t^2+4ax+4az+5at+4a^2 \ge 0$ *для любых x, y, z, t, a.*

1.23. [24] $x^4+y^4+z^2+1 \ge 2x\left(xy^2-x+z+1\right)$ *для любых x, y, z.*

1.24. (Неравенство о трех квадратах) $a^2+b^2+c^2 \ge$ $\ge ab+bc+ca$ *для любых a, b и c.*

1.25. $(x+y+z)^2 \ge 3(xy+yz+zx)$ *для любых x, y и z.*

1.26. [1] $a^2+ab+b^2 \ge 3(a+b-1)$ *для любых a и b.*

1.27. $a^2+b^2+3 \ge b(a+3)$ *для любых a и b.*

1.28. [8] $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \ge a(b+c+d+e)$ *для любых a, b, c, d, e.*

1.29. $9(x+y)(y+z)(z+x) \ge 8(x+y+z)(xy+yz+zx)$ *для всех* $x, y, z \ge 0$.

1.30. [A] $\left(x^2+y^2+z^2\right)(xy+yz+zx) \ge 2\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)$, *где* $x, y, z \ge 0$.

1.31. [A] $(x+y+z)(x+y)(y+z)(z+x) \ge 4\left(x^2y^2+y^2z^2+\right.$ $\left.+z^2x^2\right)$, *где* $x, y, z \ge 0$.

1.32. [A] $(x+y+z)^2(xy+yz+zx) \ge 4\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)$, *где* $x,y,z \ge 0$.

1.33. [A] $(x+y+z)^4 \ge 8(xy+yz+zx)\left(x^2+y^2+z^2\right)$, *где* $x,y,z \ge 0$.

1.34. $\left(x^3+y^3\right)\left(y^3+z^3\right)\left(z^3+x^3\right) \ge x^2y^2z^2(x+y)(y+z)(z+x)$, *где* $x,y,z \ge 0$.

1.35. $2\left(x^3+y^3+z^3\right) \ge x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)$, *где* $x,y,z \ge 0$.

1.36. $\dfrac{1}{a^2+b^2}+\dfrac{1}{b^2+c^2}+\dfrac{1}{c^2+a^2} \le \dfrac{a+b+c}{2abc}$, *где* $a,b,c > 0$.

1.37. [A] $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d} \ge \dfrac{4(a+b+c+d)}{ab+bc+cd+da}$, *где* $a,b,c,d > 0$.

1.38. $x+y \ge 2xy$, *где* $x,y \in [0;1]$.

1.39. [A] $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+y} \le \dfrac{3}{1+x+y}$, *где* $x,y \in [0;1]$.

1.40. [9] $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ *для каждого натурального* $n \ge 2$.

1.41. [A] $\dfrac{x_1}{x_0+x_1}+\dfrac{x_2}{x_0+x_2}+\ldots+\dfrac{x_n}{x_0+x_n} > \dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{x_0+x_1+x_2+\ldots+x_n}$, *где* $x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n > 0$, $n \ge 2$.

1.42. [8] $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2} < 2$ *для каждого натурального* n.

1.43. [9] $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$ *для каждого натурального* n.

1.44. [8] $\sqrt[3]{n} > \sqrt[4]{n+1}$ *для каждого натурального* $n \ge 3$.

1.45. [24] $(ab+bc+ca)^2 \ge 3abc(a+b+c)$ *для любых* a, b *и* c.

1.46. [A] $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \ge \dfrac{3(a+b+c)}{ab+bc+ca}$ *для любых* $a,b,c > 0$.

1.47. [7] $a^4+b^4+c^4 \ge abc(a+b+c)$ *для любых* a, b *и* c.

1.48. [A] $\sqrt{(x+y)(y+z)}+\sqrt{(y+z)(z+x)}+\sqrt{(z+x)(x+y)} \le 2(x+y+z)$, *где* $x,y,z \ge 0$.

1.49. [А] $\frac{x^3}{yz}+\frac{y^3}{zx}+\frac{z^3}{xy}\ge\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}$ *для любых* x, y, $z > 0$.

1.50. [А] $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\ge\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}$ *для любых* x, y, $z > 0$.

1.51. [8] $2x^3+3y^3\ge 4xy^2$ *для любых* $x, y\ge 0$.

1.52. [10] $\sqrt{2xy-y^2}+\sqrt{x^2-y^2}\ge x$, *где* $x\ge y\ge 0$.

1.53. [10] $\left|xy-\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)}\right|\le 1$, *где* $|x|\le 1$ *и* $|y|\le 1$.

1.54*. [А] $\left(x^a+y^a+z^a\right)\left(x^d+y^d+z^d\right)\ge\left(x^b+y^b+z^b\right)\left(x^c+\right.$ $\left.+y^c+z^c\right)$ *для любых* $x, y, z\ge 0$, *где* $0 < a < b < c < d$ *и* $a + d =$ $= b + c$.

1.55*. [14] $\left(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5\right)^2\ge 4\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+\right.$ $\left.+x_4x_5+x_5x_1\right)$ *для любых неотрицательных* x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

Глава 2

НЕРАВЕНСТВО О СРЕДНИХ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

Нередко при доказательстве неравенств используются уже доказанные известные неравенства, так называемые *замечательные неравенства*. Наиболее часто используемое из них – неравенство о средних, особенно его частный случай – неравенство Коши.

2.1. Неравенство Коши

Для всех неотрицательных $x_1,\ldots,x_n$

$$\frac{x_1+\ldots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1\ldots x_n}\ , \qquad (7)$$

причем это неравенство реализуется в форме равенства только при условии равенства всех переменных.

Левая часть этого равенства называется средним арифметическим чисел $x_1,\ldots,x_n$, правая – средним геометрическим этих чисел. Таким образом, среднее арифметическое неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического. Различные доказательства этого неравенства см. на страницах 34 и 61.

2.2. Неравенство о средних

Неравенство Коши является частным случаем более общего неравенства – так называемого неравенства о средних. Для начала определим понятие среднего степенного.

Определение 1. Пусть d – действительное число. Среднее степени d набора положительных действительных чисел $x_1,\ldots,x_n$ (среднее степенное) – это действительное число, определяемое формулой

$$A_d\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\begin{cases}\left(\dfrac{x_1^d+\ldots+x_n^d}{n}\right)^{1/d}, & \text{если } d\neq 0,\\ \sqrt[n]{x_1\ldots x_n}, & \text{если } d=0.\end{cases} \qquad (8)$$

При неотрицательных d среднее степенное определено для неотрицательных значений аргументов. Некоторые из средних степенных имеют свои названия. Например:

$$A_1\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$$ – среднее арифметическое;

$$A_0(x_1,\dots,x_n)=\sqrt[n]{x_1\dots x_n} \text{ – среднее геометрическое;}$$

$$A_{-1}(x_1,\dots,x_n)=\frac{n}{\dfrac{1}{x_1}+\dots+\dfrac{1}{x_n}} \text{ – среднее гармоническое;}$$

$$A_2(x_1,\dots,x_n)=\sqrt{\frac{x_1^2+\dots+x_n^2}{n}} \text{ – среднее квадратическое;}$$

$$A_3(x_1,\dots,x_n)=\sqrt[3]{\frac{x_1^3+\dots+x_n^3}{n}} \text{ – среднее кубическое.}$$

Теорема 2.1. (Неравенство о средних) *Если* $d_1>d_2$, *то* $A_{d_1}(x_1,\dots,x_n)\geq A_{d_2}(x_1,\dots,x_n)$, *причем равенство достигается только в случае равенства всех аргументов.*

Частным случаем неравенства о средних является неравенство **о среднем квадратическом, арифметическом, геометрическом и гармоническом:**

$$\max\{x_1,\dots,x_n\}\geq\sqrt{\frac{x_1^2+\dots+x_n^2}{n}}\geq\frac{x_1+\dots+x_n}{n}\geq$$

$$\geq\sqrt[n]{x_1\dots x_n}\geq\frac{n}{\dfrac{1}{x_1}+\dots+\dfrac{1}{x_n}}\geq\min\{x_1,\dots,x_n\}, \quad \text{где } x_1,\dots,x_n>0.$$

Из неравенства между средними арифметическим и гармоническим следует, что

$$\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_n}\geq\frac{n^2}{x_1+\dots+x_n}, \tag{9}$$

где $x_1,\dots,x_n>0$. Неравенство о среднем геометрическом и среднем гармоническом следует из неравенства Коши, доказательство неравенства о среднем квадратическом и среднем арифметическом приведено на странице 27.

Задача 2.1. [4] *Докажите неравенство* $(a+1)(b+1)(a+c)(b+c)\geq 16abc$ *для* $a,b,c\geq 0$.

Решение. Оценим снизу каждый множитель, входящий в левую часть неравенства. Четыре раза воспользуемся неравенством Коши для двух переменных, получим $a+1\geq 2\sqrt{a}$, $b+1\geq 2\sqrt{b}$, $a+c\geq 2\sqrt{ac}$, $b+c\geq 2\sqrt{bc}$. Перемножив эти неравенства, получим исходное.

Задача 2.2. [1] *Докажите неравенство* $\dfrac{x}{x^4+y^2}+\dfrac{y}{y^4+x^2}\leq\dfrac{1}{xy}$ *для* $x,\ y>0$.

Решение. Заметим, что в знаменателях дробей в левой части стоят суммы квадратов, что наводит на мысль применить к знаменателям неравенство Коши. Разобьем это неравенство на два: $\frac{x}{x^4+y^2} \le \frac{1}{2xy}$ и $\frac{y}{y^4+x^2} \le \frac{1}{2xy}$, доказав и сложив которые получим исходное. Поскольку из неравенства Коши для двух переменных x^4 и y^2 следует, что $x^4+y^2 \ge 2x^2y$, то $\frac{x}{x^4+y^2} \le \frac{x}{2x^2y} = \frac{1}{2xy}$. Аналогично получаем, что $\frac{y}{y^4+x^2} \le \frac{1}{2xy}$. Исходное неравенство доказано.

Задача 2.3. [24] *Докажите неравенство* $\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \ge \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{a+b}}$, *где* a, $b > 0$.

Решение. Воспользуемся промежуточной оценкой. Из неравенства между средним арифметическим и средним гармоническим (9) получаем $\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \ge \frac{4}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$. Для завершения доказательства осталось показать, что $\frac{4}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \ge \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{a+b}}$. Последнее неравенство равносильно неравенству $\sqrt{2(a+b)} \ge \sqrt{a}+\sqrt{b}$, обе части которого неотрицательны. Поэтому, возведя обе части в квадрат и приведя подобные слагаемые, мы снова получим равносильное неравенство $a+b \ge 2\sqrt{ab}$, один из вариантов записи неравенства Коши для двух переменных.

Задача 2.4. *Докажите неравенство* $\left(x^3+y^3+z^3\right)(x+y+z) \le 3\left(x^4+y^4+z^4\right)$ *для любых* $x, y, z \ge 0$.

Решение. Из неравенства о средних имеем

$$\left(\sqrt[4]{\frac{x^4+y^4+z^4}{3}}\right)^3 \ge \frac{x^3+y^3+z^3}{3} \text{ и } \sqrt[4]{\frac{x^4+y^4+z^4}{3}} \ge \frac{x+y+z}{3}.$$

Перемножая эти два неравенства, получим неравенство, равносильное исходному.

В следующей задаче используется обозначение $n!$. Такая запись читается как «эн факториал». Считаем по определению, что $0! = 1$, $1! = 1$, а для каждого натурального $n \ge 2$ запись $n!$ означает произведение всех натуральных подряд идущих чисел, начиная с 1 и заканчивая n, т.е. $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Например, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ и т.д.

Задача 2.5. [8] *Докажите неравенство* $n! < \left(\sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)}{6}}\right)^n$ *для всех натуральных* $n \ge 2$.

Решение. Применим неравенство Коши к числам $1^2, 2^2, \ldots, n^2$. Получим, что

$$\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n} > \sqrt[n]{1^2\cdot 2^2\cdot\ldots\cdot n^2} = \sqrt[n]{(n!)^2}.$$

Возведя обе части неравенства в степень $\frac{n}{2}$ и использовав известное тождество

$$1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

получим исходное неравенство.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Докажите неравенства:

2.6. $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \ge 3$ *для* a, b, $c > 0$.

2.7. [7] $x^4+y^4+8 \ge 8xy$ *для любых* $x, y \ge 0$.

2.8. [7] $(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \ge 16$ *для любых* a, b, c, $d > 0$.

2.9. [4] $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \ge \frac{9}{2(a+b+c)}$ *для любых* a, b, $c > 0$.

2.10. [A] $\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a} \ge \frac{9abc}{2(ab+bc+ca)}$, *где* a, b, $c > 0$.

2.11. [8] $\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}+\sqrt{4z+1} \le \sqrt{21}$ *для любых допустимых значений* x, y *и* z, *если* $x + y + z = 1$.

2.12. [A] $(a^2-b^2)(c+a)+(b^2-c^2)(a+b)+(c^2-a^2)(b+c) \ge 0$, *где* $a,b,c \ge 0$.

2.13. [A] $8(x+y+z)^3 \ge 27(x+y)(y+z)(z+x)$ *для всех* $x, y, z \ge 0$.

2.14. [A] $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \ge \frac{3(a+b+c)}{2(a^2+b^2+c^2)}$, *где* a, b, $c > 0$.

2.15. [A] $8(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2\right)\geq 9(x+y)(y+z)(z+x)$ *для всех* $x,y,z\geq 0$.

2.16. [A] $3\left(x^3+y^3+z^3\right)\geq (x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2\right)$ *для любых* $x,y,z\geq 0$.

2.17. [A] $(x+y+z)(xy+yz+zx)\geq 9xyz$ *для любых* $x,y,z\geq 0$.

2.18. [A] $3\left(x^3+y^3+z^3\right)^2\geq (xy+yz+zx)^3$ *для любых* $x,y,z\geq 0$.

2.19. [A] $3abc(ab+bc+ca)\leq (a+b+c)\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$, *где* $a,\ b,\ c>0$.

2.20. [10] $\sqrt{\dfrac{x}{y+z}}+\sqrt{\dfrac{y}{z+x}}+\sqrt{\dfrac{z}{x+y}}\geq 2$ *для любых допустимых неотрицательных значений* $x,\ y,\ z$.

2.21. [8] $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}\geq\sqrt[3]{\dfrac{abc+abd+acd+bcd}{4}}$, *где* $a,b,c,d\geq 0$.

2.22. [4] $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^8\geq 64xy(x+y)^2$, *где* $x,y\geq 0$.

2.23. [1] $1+x^{n+1}\geq\dfrac{(2x)^n}{(1+x)^{n-1}}$ *для всех* $x\geq 0$ *и натуральных* n.

2.24. [8] $(2n-1)!<n^{2n-1}$ *для любого натурального* $n\geq 2$.

2.25. [8] $n!<\left(\sqrt[3]{\dfrac{n(n+1)^2}{4}}\right)^n$ *для любого натурального* $n\geq 2$.

2.26*. [2] $(1+x_1)(1+x_1+x_2)\ldots(1+x_1+x_2+\ldots+x_n)\geq$ $\geq\sqrt{(n+1)^{n+1}}\cdot\sqrt{x_1x_2\ldots x_n}$, *где все* x_i *неотрицательны.*

Глава 3

НЕРАВЕНСТВО КОШИ–БУНЯКОВСКОГО–ШВАРЦА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

Теорема 3.1. (Неравенство Коши–Буняковского–Шварца) *Для любых двух наборов чисел* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n| \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}. \quad (10)$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \ldots = \frac{b_n}{a_n}$, *причем* a_i *в этом равенстве равно* 0 *тогда и только тогда, когда* $b_i = 0$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Доказательство. Если $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, то неравенство реализуется в форме равенства. Пусть $a_i \ne 0$ для некоторого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Положим $A = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$, $B = b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2$, $C = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$, тогда $A > 0$, так как $a_i \ne 0$. Рассмотрим квадратичную функцию $f(x) = Ax^2 + 2Cx + B$. Она принимает только неотрицательные значения, поскольку

$$f(x) = \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)x^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)x +$$

$$+\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right) = (a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 + \ldots + (a_nx + b_n)^2 \ge 0,$$

следовательно, дискриминант D квадратного трехчлена $Ax^2 + 2Cx + B$ неположителен, т.е. $4C^2 - 4AB \le 0$, откуда получаем, что $|C| \le \sqrt{AB}$. Неравенство (10) доказано. Заметим теперь, что это неравенство реализуется в форме равенства тогда и только тогда, когда $D = 0$, что в свою очередь возможно тогда и только тогда, когда найдется x_0 такое, что $f(x_0) = 0$. Но $f(x_0) = 0$ тогда и только тогда, когда $a_1x_0 + b_1 = a_2x_0 + b_2 = \ldots = a_nx_0 + b_n = 0$, т.е. $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \ldots = \frac{b_n}{a_n} = -x_0$.

Неравенство Коши–Буняковского–Шварца встречается также в следующей форме записи:

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n)^2 \le \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2\right), \quad (11)$$

которая получается возведением в квадрат обеих частей неравенства (10).

Сформулируем и докажем одно важное следствие из неравенства (11).

Следствие 3.2. (Лемма Титу) *Для любых двух наборов чисел* $a_1, a_2, \dots a_n \geq 0$ *и* $b_1, b_2, \dots b_n > 0$

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}. \qquad (12)$$

Замечание. Это неравенство также встречается в зарубежной литературе как неравенство Коши–Шварца в форме Энгеля.

Доказательство. Перепишем неравенство (12) в виде

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq \left(\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n}\right)(b_1 + b_2 + \dots + b_n). \quad (13)$$

Положим в неравенстве (11) $x_i = \frac{a_i}{\sqrt{b_i}}$ и $y_i = \sqrt{b_i}$ для каждого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, получим неравенство (13). □

Задача 3.1. *Докажите, что*

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \qquad (14)$$

для всех неотрицательных $x_1, \dots, x_n$, *причем это неравенство реализуется в форме равенства только при условии равенства всех переменных.*

Решение. Положим в неравенстве (10) $a_i = x_i$, $y_i = 1$ для каждого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, получим неравенство $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq$ $\leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{n}$, равносильное неравенству (14).

Задача 3.2. [8] *Докажите, что* $\left(x^3 + y^3 + z^3\right)(x + y + z) \geq$ $\geq \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2$ *для любых* $x, y, z \geq 0$.

Решение. Положив в неравенстве (11) $n = 3$, $a_1 = x^{3/2}$, $a_2 = y^{3/2}$, $a_3 = z^{3/2}$, $b_1 = x^{1/2}$, $b_2 = y^{1/2}$, $b_3 = z^{1/2}$, получим исходное неравенство.

Задача 3.3. [6] (Неравенство Несбитта) *Докажите неравенство* $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ *для* a, b, $c > 0$.

Решение. Для того чтобы можно было воспользоваться неравенством (12), домножим числитель и знаменатель каждой дроби в левой части неравенства на выражение, стоящее в соответствующем числителе. Тогда по лемме Титу имеем

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(c+a)}+\frac{c^2}{c(a+b)}\geq$$

$$\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}.$$

Для завершения доказательства исходного неравенства осталось показать, что

$$\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}\geq\frac{3}{2}.$$

Последнее неравенство равносильно верному неравенству $(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)$ (см. задачу 1.25).

Неравенство Несбитта является частным случаем неравенства Шапиро.

Теорема 3.3. (Неравенство Шапиро) *Пусть n – натуральное число, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – положительные числа и выполнено одно из двух условий:*

а) n – четное и не превосходит 12;

б) n – нечетное и не превосходит 23.

Тогда выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}}\geq\frac{n}{2}, \tag{15}$$

где $x_{n+1}=x_1$, $x_{n+2}=x_2$.

Далее вам предлагается самостоятельно доказать некоторые частные случаи неравенства Шапиро, используя неравенство Коши–Буняковского–Шварца и следствия из него.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Докажите неравенства:

3.4. [8] $1+ab\leq\sqrt{1+a^2}\cdot\sqrt{1+b^2}$ *для любых a и b.*

3.5. [8] $\sqrt{(a+c)(b+d)}\geq\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$ *для любых* $a,b,c,d\geq 0$.

3.6. [8] $\left(a^2+b^2\right)\left(a^4+b^4\right)\geq\left(a^3+b^3\right)^2$ *для любых a, b и c.*

3.7. [8] $|3\sin x-4\cos x|\leq 5$ *для любого x.*

3.8. [8] $\sin x\sin y\sin z+\cos x\cos y\cos z\leq 1$ *для любых x, y и z.*

3.9. [8] $\left(2x\sqrt{1-x^2}+2x^2-1\right)^2\leq 2$ *для всех* $x\in[-1;1]$.

3.10. [8] а) $\left|a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}\right|\leq 1$, б) $\left|ab+\sqrt{\left(1-a^2\right)\left(1-b^2\right)}\right| \le 1$

для любых допустимых значений a и b.

3.11. [8] $(a_1b_1+\ldots+a_nb_n)\left(\frac{a_1}{b_1}+\ldots+\frac{a_n}{b_n}\right) \ge (a_1+\ldots+a_n)^2$, *где* $a_1,\ldots,a_n,\ b_1,\ldots,b_n > 0$.

3.12. [8] $\left(\sqrt{a_1b_1}+\ldots+\sqrt{a_nb_n}\right)^2 \le (a_1c_1+\ldots+a_nc_n)\left(\frac{b_1}{c_1}+\ldots+\frac{b_n}{c_n}\right)$ *для любых* $a_1,\ldots,a_n,\ b_1,\ldots,b_n,\ c_1,\ldots,c_n > 0$.

3.13. [24] $x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_nx_1 \le x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$ *для любых действительных* $x_1,x_2,\ldots,x_n$.

3.14. [24] (Неравенство треугольника)

$$\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\ldots+(a_n-b_n)^2} \le$$
$$\le \sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}$$

для любых действительных чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n$ *и* $b_1,b_2,\ldots,b_n$.

3.15. [19] $\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+d^2\right)\left(d^2+a^2\right) \ge (ab+cd)(ad+$ $+bc)(ac+bd)^2$ *для любых a, b, c, d.*

3.16. [A] $\frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2} \le \frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$ *для любых положительных x, y, z.*

3.17. [A] $\frac{x}{2y+z}+\frac{y}{2z+x}+\frac{z}{2x+y} \ge 1$ *для любых x, y, z* > 0.

3.18. [24] $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y} \ge \frac{3}{2}$, *если x, y, z* > 0 *и* $xyz = 1$.

3.19. [24] $\frac{a}{b+2c+d}+\frac{b}{c+2d+a}+\frac{c}{d+2a+b}+\frac{d}{a+2b+c} \ge 1$, *где a, b, c, d* > 0.

3.20. [24] $\frac{a^2}{b(a+c)}+\frac{b^2}{c(b+d)}+\frac{c^2}{d(c+a)}+\frac{d^2}{a(d+b)} \ge 2$, *если a, b, c, d* > 0.

3.21. [8] $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \ge \frac{a+b+c}{3}$ *для любых положительных a, b, c.*

3.22. [8] (Неравенство Шапиро для четырех переменных)

$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b} \ge 2$, *если a, b, c, d* > 0.

3.23. [16] (Неравенство Шапиро для пяти переменных) $\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\frac{x_3}{x_4+x_5}+\frac{x_4}{x_5+x_1}+\frac{x_5}{x_1+x_2}\ge\frac{5}{2}$ *для положительных значений переменных.*

3.24. [16] (Неравенство Шапиро для шести переменных) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+e}+\frac{d}{e+f}+\frac{e}{f+a}+\frac{f}{a+b}\ge 3$ *для положительных значений переменных.*

3.25. $\frac{x_1+x_3}{x_1+x_2}+\frac{x_2+x_4}{x_2+x_3}+\frac{x_3+x_1}{x_3+x_4}+\frac{x_4+x_2}{x_4+x_1}\ge 4$, *где* $x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$.

3.26. [A] $\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}\ge\frac{(ab+bc+ca)(a+b+c)}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}$ *для любых положительных a, b, c.*

3.27*. [22] $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\ge\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}+2$, *если* $x, y, z > 0$ *и* $x+y+z=3$.

3.28*. [20] $\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}\le\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{abc}$ *для всех* $a,b,c\ge 1$.

3.29*. [23] $\sqrt{a+b+c}\ge\frac{a}{\sqrt{2a+b}}+\frac{b}{\sqrt{2b+c}}+\frac{c}{\sqrt{2c+a}}$ *для любых* $a, b, c > 0$.

3.30*. [21] $\frac{ac}{ax^2+2bx+c}+\frac{ba}{bx^2+2cx+a}+\frac{cb}{cx^2+2ax+b}\le$ $\le\frac{a+b+c}{(x+1)^2}$, *где все переменные неотрицательны и никакие две из них не равны нулю.*

3.31*. [18] $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}\ge\frac{a+b+c}{a+b+c-\sqrt[3]{abc}}$ *для любых* $a, b, c > 0$.

Глава 4

ИНДУКЦИЯ В ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ НЕРАВЕНСТВ

Математическая индукция – один из методов доказательства в математике. Она используется в тех случаях, когда нужно доказать истинность какого-либо утверждения для всех натуральных чисел.

Предположим, что требуется установить справедливость бесконечной последовательности утверждений, занумерованных натуральными числами: $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$

Допустим, что:

1. Установлено, что P_1 верно (это утверждение называется базой индукции).

2. Для любого n доказано, что если верно P_n, то верно P_{n+1} (это утверждение называется шагом индукции или индукционным переходом).

Тогда все утверждения нашей последовательности верны.

Существует еще одна разновидность этого метода, так называемый принцип полной математической индукции. Приведем его формулировку.

Пусть дана последовательность утверждений $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ Допустим, что:

1. Установлено, что P_1 верно.

2. Для любого натурального n доказано, что если верны все $P_1, P_2, \ldots, P_n$, то верно и P_{n+1} (это утверждение называется шагом индукции или индукционным переходом).

Тогда все утверждения в этой последовательности верны.

Если нужно доказать истинность утверждений P_n не для всех натуральных n, а только для $n \geq k$, где k – некоторый номер, то база индукции заключается в проверке утверждения P_k.

Замечание. Иногда индукцию удобно применять также к конечному набору утверждений, занумерованных числами от некоторого начального до какого-то очень большого значения (см. задачу 4.23).

Доказательство по индукции наглядно может быть представлено в виде так называемого принципа домино. Пусть какое угодно число косточек домино выставлено в ряд таким образом, что каждая косточка, падая, обязательно опрокидывает следующую за ней косточку (в этом заключается индукционный переход). Тогда, если мы толкнем первую косточку (это база индукции), то все косточки в ряду упадут.

Задача 4.1. [7] *Докажите, что* $2^n > n^3$ *для каждого натурального* $n \geq 10$.

Решение. Воспользуемся методом математической индукции.

База индукции. При $n = 10$ неравенство верно: $2^{10} = 1024 > > 1000 = 10^3$.

Шаг индукции. Предположим, что исходное неравенство верно для некоторого $n = k$. Докажем, что тогда оно верно и для $n = k + 1$. Имеем $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k^3$. Осталось доказать неравенство

$$2k^3 \geq (k+1)^3 \qquad (16)$$

для $k \geq 10$. Мы докажем его для $k \geq 4$. Положим $x = k - 4$, тогда $k = x + 4$, где $x \geq 0$. Неравенство (16) запишется как $2(x+4)^3 \geq (x+5)^3$, что равносильно $x^3 + 9x^2 + 21x + 3 \geq 0$. Последнее неравенство верно, поскольку $x \geq 0$, что завершает индукционный переход.

Задача 4.2. (Неравенство Бернулли) *Докажите, что при любом натуральном* n *для* $x > -1$ *верно неравенство* $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Решение. Воспользуемся методом математической индукции. При $n = 1$ исходное неравенство принимает вид $1 + x \geq 1 + x$. Предположим, что неравенство справедливо при некотором $n = = k$. Докажем, что тогда оно будет верно и для $n = k + 1$:

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k (1+x) \geq (1+kx)(1+x) =$$

$$= 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x.$$

Индукционный переход выполнен, следовательно, исходное неравенство верно для всех натуральных n.

Замечание. Если в неравенстве Бернулли выполнено $n \geq 2$, то оно становится строгим при $x \neq 0$.

Задача 4.3. [4] *Докажите, что* $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2} > \dfrac{4^n}{n+1}$ *для каждого натурального* $n \geq 2$.

Решение. Разъяснение обозначения $n!$ см. на странице 23. Докажем неравенство индукцией по n.

База индукции. При $n = 2$ исходное неравенство верно: $6 > \dfrac{16}{3}$.

Шаг индукции. Предположим, что неравенство верно при $n = k$. Докажем, что тогда оно верно и для $n = k + 1$. Нужно доказать, что $\frac{(2(k+1))!}{((k+1)!)^2} > \frac{4^{k+1}}{k+2}$. Используя предположение индукции, имеем

$$\frac{(2(k+1))!}{((k+1)!)^2} = \frac{(2k)!(2k+1)(2k+2)}{(k!)^2(k+1)^2} = \frac{(2k)!}{(k!)^2} \cdot \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2} >$$

$$> \frac{4^k}{k+1} \cdot \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2}.$$

Для завершения доказательства осталось показать, что

$$\frac{4^k}{k+1} \cdot \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2} \geq \frac{4^{k+1}}{k+2}.$$

Выполним сокращение в левой части последнего неравенства, домножим обе части на $(k+1)^2(k+2)$ и поделим на $2 \cdot 4^k$, получим равносильное неравенство $(2k+1)(k+2) \geq 2(k+1)^2$. Раскрыв в нем скобки, получаем верное неравенство $2k^2 + 5k + 2 \geq 2k^2 + 4k + 2$. Индукционный переход выполнен, следовательно, исходное неравенство верно для каждого натурального n.

Задача 4.4. [7] *Докажите, что* $n^n > (n+1)^{n-1}$ *для каждого натурального* $n \geq 2$.

Решение. Положим $a_n = n^n$, $b_n = (n+1)^{n-1}$. Тогда исходное неравенство можно записать в равносильном виде как $\frac{a_n}{b_n} > 1$. Проверим базу индукции. При $n = 2$ неравенство верно: $2^2 = 4 > 3 = 3^1$. Предположим, что оно верно для некоторого $n = k$. Докажем, что оно верно и для $n = k + 1$. Чтобы доказать индукционный переход, достаточно показать, что $\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} \geq \frac{a_k}{b_k}$, а это равносильно неравенству $a_{k+1}b_k \geq a_k b_{k+1}$, которое запишется как $(k+1)^{2k} \geq (k(k+2))^k$ или $(k^2+2k+1)^k \geq (k^2+2k)^k$. Последнее неравенство верно, следовательно, индукционный переход выполнен, что завершает доказательство.

Замечание. Не любое неравенство, зависящее от натурального параметра, доказывается методом математической индукции. Если при выполнении шага индукции мы приходим к заведомо неверному неравенству, то, скорее всего, здесь нужно использовать другие методы доказательства, например разбиение и оценку (см. задачи 1.40, 1.42).

В некоторых неравенствах метод математической индукции целесообразно использовать в следующей видоизмененной форме:

а) Сначала доказывается справедливость требуемого неравенства для натуральных значений n, равных $n_1, n_2, \ldots, n_k$, …, где $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ (особенно часто в качестве последовательности $\{n_k\}$ используется последовательность степеней двойки с натуральными показателями).

б) Затем проверяется, что из справедливости требуемого неравенства для произвольного $n = m + 1$ (где $m \geq 1$) следует, что оно справедливо для $n = m$.

Такой вариант использования метода математической индукции встречается под названием «индукция вверх и вниз».

Задача 4.5. [8] *Докажите неравенство Коши*

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \tag{17}$$

для всех неотрицательных $x_1, \ldots, x_n$.

Решение. Неравенство Коши для $n = 2$ верно. Докажем, что если оно верно для $n = k$, то оно верно и для $n = 2k$. Действительно,

$$\frac{x_1 + \ldots + x_k + x_{k+1} + \ldots + x_{2k}}{2k} =$$

$$= \frac{\dfrac{x_1 + \ldots + x_k}{k} + \dfrac{x_{k+1} + \ldots + x_{2k}}{k}}{2} \geq \sqrt{\frac{x_1 + \ldots + x_k}{k} \cdot \frac{x_{k+1} + \ldots + x_{2k}}{k}} \geq$$

$$\geq \sqrt{\sqrt[k]{x_1 \ldots x_k} \cdot \sqrt[k]{x_{k+1} \ldots x_{2k}}} = \sqrt[2k]{x_1 \ldots x_{2k}},$$

следовательно, исходное неравенство справедливо для всех $n = 2^t$, где t – натуральное. Докажем теперь, что если оно верно для $n = m + 1$, то оно верно и для $n = m$. Положим $c = \dfrac{x_1 + \ldots + x_m}{m}$. Тогда

$$c = \frac{x_1 + \ldots + x_m + c}{m+1} \geq \sqrt[m+1]{x_1 \ldots x_m c},$$

откуда получаем, что

$$c^{m+1} \geq x_1 \ldots x_m c. \tag{18}$$

Если $c = 0$, то $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0$ и неравенство для этого набора переменных реализуется в форме равенства. Если же

$c \neq 0$, то, поделив обе части неравенства (18) на c, после извлечения корня m-й степени из обеих частей неравенства получим $c \geq \sqrt[m]{x_1 \ldots x_m}$, что и требовалось. Окончательно получаем, что исходное неравенство верно для всех натуральных n.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Докажите неравенства:

4.6. [8] $\left(2-\frac{1}{n}\right)^n > n$ *для каждого натурального* $n \geq 2$.

4.7. [8] $n! > 2^{n-1}$ *для каждого натурального* $n \geq 3$.

4.8. [9] $n^{n+1} > (n+1)^n$ *для каждого натурального* $n \geq 3$.

4.9. [8] $\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{3}{n}\right)\ldots\left(2-\frac{2n-1}{n}\right) > \frac{1}{n!}$ *для каждого натурального* $n \geq 2$.

4.10. [9] $2! \cdot 4! \cdot \ldots \cdot (2n)! > ((n+1)!)^n$ *для каждого натурального* $n \geq 2$.

4.11. [9] $(2n)! < 2^{2n} \cdot (n!)^2$ *для каждого натурального n.*

4.12. $\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ *для каждого натурального* $n \geq 2$.

4.13. [6] $(1-x)^n + (1+x)^n < 2^n$ *для каждого натурального* $n \geq 2$, *где* $|x| < 1$.

4.14. [7] $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{3}{5}$ *для каждого натурального* $n \geq 3$.

4.15. [7] $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$ *для каждого натурального n.*

4.16. [7] $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\left(\sqrt{n+1}-1\right)$ *для каждого натурального n.*

4.17. [8] $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 \geq 4(x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_nx_1)$ *для любых положительных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *и для всех натуральных* $n \geq 4$.

4.18. [4] (Неравенство Коробова)

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \leq \left(\frac{a_1}{\sqrt{1}+\sqrt{0}} + \frac{a_2}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \ldots + \frac{a_n}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\right)^2$$

при любом натуральном n, если $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq 0$.

4.19.
$$\frac{1}{2}+\sqrt{n-\frac{1}{2}}<\sqrt{n+\sqrt{n-1+\sqrt{n-2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}}<\frac{1}{2}+\sqrt{n+\frac{1}{4}}$$
при любом натуральном $n > 1$.

4.20. (Неравенство Гюйгенса) $(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n)\geq$ $\geq\left(1+\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}\right)^n$ *при любом натуральном* n, *где все* x_i *неотрицательны.*

4.21. (Неравенство Ки Фана, или Фань Цзы)
$$\frac{x_1x_2\ldots x_n}{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^n}\leq\frac{(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)}{\left((1-x_1)+(1-x_2)+\ldots+(1-x_n)\right)^n}$$
при любом натуральном n, *где* $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\left(0;\frac{1}{2}\right]$.

4.22*. [A] $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}>\frac{4(x_1+x_2+\ldots+x_n)}{x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n+x_nx_1}$ *при* $n\geq 5$, *где все* x_i *положительны.*

4.23*. [1] $\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\ldots+\sqrt[1993]{1993}}}<2$.

4.24*. [6] $\left(2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n\text{ радикалов}}\right):\left(2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n-1\text{ радикалов}}\right)>$ $>\frac{1}{4}$ *для каждого натурального* $n\geq 2$.

4.25*. [11] $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\cdot\ldots\cdot\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}}}<3$ *для каждого натурального* $n\geq 2$.

СИММЕТРИЧНЫЕ И ОДНОРОДНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Определение 1. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется симметричной (симметрической) относительно набора переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, если для нее верны равенства

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}),$$

где $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ – любая перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$ $(n \geq 2)$.

Если левую и правую части неравенства образуют симметричные функции от совпадающих наборов переменных, то такое неравенство называют симметричным неравенством.

Другими словами, функция является симметричной, если ее значение не меняется при любой перестановке переменных

Определение 2. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется однородной порядка k (где k – целое) относительно набора переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, если для любого не равного нулю $\lambda \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

для всех наборов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из области определения функции f. Число k называют порядком однородности функции f.

При доказательстве неравенств с однородными левой и правой частями с одинаковым порядком однородности k (для краткости будем называть такие неравенства однородными) можно уменьшить количество переменных. Пусть дано неравенство

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) \vee g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n),$$

где символ $\vee$ означает один из знаков неравенств $>$, $<$, $\geq$ или $\leq$. Поделим обе части неравенства на x_n^k при условии, что $x_n > 0$.

Получим равносильное неравенство

$$\frac{1}{x_n^k} f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) \vee \frac{1}{x_n^k} g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n),$$

которое по свойству однородности функций f и g можно записать в виде

$$f\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, 1\right) \vee g\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, 1\right).$$

Теперь можно сделать замену переменных, положив $a_1 = \dfrac{x_1}{x_n}$, $a_2 = \dfrac{x_2}{x_n}, \ldots, a_{n-1} = \dfrac{x_{n-1}}{x_n}$. Тогда исходное неравенство примет вид

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, 1) \vee g(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, 1). \qquad (19)$$

В случае, когда неравенство нужно доказать для любых положительных (неотрицательных) значений переменных, иногда бывает полезно поделить обе части неравенства на k-ю степень наибольшей из ненулевых переменных, тогда неравенство (19) нужно будет доказать для случая $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \in (0;1]$ (или $[0;1]$).

Если же требуется доказать неравенство вида $P(x, y) \vee 0$, где $P(x,y)$ – симметрический многочлен двух неотрицательных переменных x и y, то бывает удобно ввести новые переменные u и v, определенные формулами $u = x + y$, $v = xy$ (такая замена переменных называется симметрической), и записать многочлен $P(x,y)$ в виде $Q(u,v)$, где $Q(u,v)$ – многочлен переменных u и v. При этом степень нового многочлена будет меньше степени первоначального, а переменные u и v должны будут удовлетворять неравенствам $u \geq 0$ и $0 \leq v \leq \dfrac{u^2}{4}$. Последнее неравенство следует из того, что $(x+y)^2 \geq 4xy$.

Замечание. Если неравенство имеет вид $P(x, y, z) \vee 0$, где $P(x,y,z)$ – симметрический многочлен трех неотрицательных переменных x, y и z, то симметрическая замена имеет вид $a = xyz$, $b = xy + yz + zx$, $c = x + y + z$.

После симметрической замены переменных в неравенстве $P(x, y) \vee 0$ оно примет вид $Q(u, v) \vee 0$, причем функцию Q можно рассматривать как функцию одной переменной v, где $v \in \left[0; \dfrac{u^2}{4}\right]$. Тогда задача может быть переформулирована одним из следующих способов: доказать, что наименьшее значение функции на данном отрезке не меньше (больше) нуля, если знак $\vee$ в предыдущем неравенстве означал $\geq$ (соответственно $>$), либо доказать, что наибольшее значение функции на данном отрезке не больше (меньше) нуля, если знак $\vee$ в предыдущем неравенстве означал $\leq$ (соответственно $<$). При этом мы будем пользоваться следующим фактом:

Теорема 5.1. *На отрезке* $[x_1; x_2]$ *непрерывная функция* $f(x)$ *достигает своего наибольшего (наименьшего) значения или в точке максимума (точке минимума), или на конце отрезка.*

Доказательство. Отметим свойства квадратичной функции $f(x)=ax^2+bx+c$, которые нам понадобятся при доказательстве неравенств. Предположим, что нам нужно доказать неравенство

$$ax^2+bx+c\ge 0 \text{ при } x\in[x_1;x_2].$$

Рассмотрим два случая.

1) $a < 0$. Тогда график функции $f(x)$ – парабола, ветви которой направлены вниз. Функция $f(x)$ не имеет точек минимума на промежутке $[x_1;x_2]$, следовательно, наименьшее значение она принимает на конце этого промежутка. Поэтому если мы докажем, что в точках x_1 и x_2 функция $f(x)$ принимает неотрицательные значения, то и на всем отрезке $[x_1;x_2]$ она будет принимать неотрицательные значения.

2) $a > 0$. Тогда график функции $f(x)$ – парабола, ветви которой направлены вверх. Для того чтобы выполнялось неравенство $f(x)\ge 0$, достаточно, чтобы выполнялось одно из двух условий:

а) $x_{\min}\notin[x_1,x_2], f(x_1)\ge 0, f(x_2)\ge 0$;

б) $f(x_{\min})\ge 0$, где $x_{\min}$ – точка минимума функции $f(x)$.

Действительно, если $x_{\min}\notin[x_1,x_2]$, то $f(x)$ принимает наименьшее значение на $[x_1;x_2]$ на конце этого отрезка, а так как $f(x_1)\ge 0,\ f(x_2)\ge 0$, то $f(x)\ge 0$ для всех $x\in[x_1;x_2]$. Если же $f(x_{\min})\ge 0$, то $f(x)\ge 0$ для всех действительных значений x.

Задача 5.1. [А] *Докажите, что*

$$3\left(x^3+y^3+z^3\right)\ge(x+y+z)(xy+yz+zx)$$

для всех $x,y,z\ge 0$.

Решение. Данное неравенство – симметричное и однородное порядка 3. Если $x = y = z = 0$, то неравенство верно. Пусть одна из переменных, например z, не равна нулю. Поделив обе части неравенства на z^3 и сделав замену переменных $a=\dfrac{x}{z},\ b=\dfrac{y}{z}$, мы придем к неравенству

$$3\left(a^3+b^3+1\right)\ge(a+b+1)(ab+a+b),$$

доказав которое для любых $a,b\ge 0$, получим требуемый результат. Сделаем симметрическую замену переменных $u = a + b$, $v = ab$, причем новые переменные должны удовлетворять неравенствам $u\ge 0$, $0\le v\le\dfrac{u^2}{4}$, поскольку $0\le ab\le\dfrac{(a+b)^2}{4}$. Тогда нам достаточно будет доказать неравенство

$$3\left(u^3-3uv+1\right)\ge(u+1)(v+u)$$

или эквивалентное ему: $-(10u+1)v+3u^3-u^2-u+3\ge 0$, где $u\ge 0$, $0\le v\le \dfrac{u^2}{4}$. Рассмотрим функцию $f(v)=-(10u+1)v+$ $+3u^3-u^2-u+3$, линейную относительно переменной v, на промежутке $\left[0;\dfrac{u^2}{4}\right]$, где $u\ge 0$. Поскольку эта функция убывающая, то для того, чтобы она была неотрицательна на всем указанном отрезке, необходимо и достаточно, чтобы она принимала неотрицательное значение на правом конце этого промежутка. Но

$$f\left(\frac{u^2}{4}\right)=-(10u+1)\frac{u^2}{4}+3u^3-u^2-u+3=\frac{(u-2)^2(2u+3)}{4}\ge 0,$$

следовательно, $f(v)\ge 0$ при $u\ge 0$ и $0\le v\le \dfrac{u^2}{4}$.

Задача 5.2. [А] *Докажите, что* $8\left(x^2+y^2+z^2\right)(xy+$ $+yz+zx)\ge 3(x+y+z)(x+y)(y+z)(z+x)$ *для всех* x, y, $z\ge 0$.

Решение. Данное неравенство – симметричное и однородное порядка 4. Если $x = y = z = 0$, то неравенство верно. Пусть одна из переменных, например z, не равна нулю. Поделив обе части неравенства на z^4 и сделав замену переменных $a=\dfrac{x}{z}$, $b=\dfrac{y}{z}$, мы придем к неравенству

$$8\left(a^2+b^2+1\right)(ab+a+b)\ge 3(a+b+1)(a+b)(ab+a+b+1),$$

доказав которое для любых $a,b\ge 0$, получим требуемый результат. Сделаем симметрическую замену переменных $u = a + b$, $v = ab$, причем новые переменные должны удовлетворять неравенствам $u\ge 0$ и $0\le v\le \dfrac{u^2}{4}$. Тогда нам достаточно будет доказать неравенство

$$8\left(u^2-2v+1\right)(v+u)\ge 3(u+1)u(v+u+1)$$

или эквивалентное ему:

$$-16v^2+\left(5u^2-19u+8\right)v+5u^3-6u^2+5u\ge 0,$$

где $u\ge 0$ и $0\le v\le \dfrac{u^2}{4}$. Рассмотрим функцию

$$f(v)=-16v^2+\left(5u^2-19u+8\right)v+5u^3-6u^2+5u,$$

квадратичную относительно переменной v, определенную на промежутке $\left[0;\frac{u^2}{4}\right]$, где u неотрицательно. На концах этого промежутка она принимает неотрицательные значения. Действительно, $f(0)=u\left(5u^2-6u+5\right)\geq 0$, поскольку $u\geq 0$ и квадратный трехчлен $5u^2-6u+5$ принимает только положительные значения в силу отрицательности своего дискриминанта; $f\left(\frac{u^2}{4}\right)=\frac{u(u-2)^2(u+5)}{4}\geq 0$. Кроме того, эта функция не имеет точек минимума (так как старший коэффициент отрицателен), а значит, она неотрицательна на всем промежутке.

В некоторых случаях доказательство однородного неравенства можно значительно упростить, если предположить, что входящие в него переменные связаны между собой одним или несколькими равенствами.

Задача 5.3. [10] *Докажите неравенство*

$$\left(a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+\ldots+a_nb_nc_n\right)^3\leq$$
$$\leq\left(a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3\right)\left(b_1^3+b_2^3+\ldots+b_n^3\right)\left(c_1^3+c_2^3+\ldots+c_n^3\right),$$

где $a_i,b_i,c_i\geq 0$ *для всех* $i\in\{1,2,\ldots,n\}$.

Решение. Если выполнено хотя бы одно из условий $a_1=a_2=\ldots=a_n=0$, $b_1=b_2=\ldots=b_n=0$, $c_1=c_2=\ldots=c_n=0$, то неравенство реализуется в форме равенства. Пусть ни одно из перечисленных условий не выполнено. Заметим, что если ввести новые переменные x_i,y_i,z_i (где $i\in\{1,2,\ldots,n\}$), определенные формулами $x_i=\frac{a_i}{\alpha}$, $y_i=\frac{b_i}{\beta}$, $z_i=\frac{c_i}{\gamma}$, где α,β и γ – произвольные положительные константы, и сделать замену переменных, то после сокращения на константу получим то же самое неравенство с точностью до обозначений переменных. Подберем теперь числа α,β и γ так, чтобы новые переменные удовлетворяли условию

$$x_1^3+x_2^3+\ldots+x_n^3=y_1^3+y_2^3+\ldots+y_n^3=z_1^3+z_2^3+\ldots+z_n^3=1.\quad(20)$$

Для этого возьмем $\alpha=\sqrt[3]{a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3}$, $\beta=\sqrt[3]{b_1^3+b_2^3+\ldots+b_n^3}$, $\gamma=\sqrt[3]{c_1^3+c_2^3+\ldots+c_n^3}$; ясно, что α, β, $\gamma>0$. Теперь достаточно доказать неравенство

$$x_1y_1z_1+x_2y_2z_2+\ldots+x_ny_nz_n\leq 1\quad(21)$$

для всех значений x_i,y_i,z_i ($i\in\{1,2,\ldots,n\}$), удовлетворяющих условию (20). Из неравенства между средними геометрическим и кубическим имеем $x_i y_i z_i \le \dfrac{x_i^3 + y_i^3 + z_i^3}{3}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Складывая эти неравенства, получим неравенство (21).

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Докажите неравенства:

5.4. [10] $(a+b)\left(a^2+b^2\right)\ldots\left(a^n+b^n\right) \ge \left(\sqrt{a^{n+1}+b^{n+1}}\right)^n$, *где* $a, b \ge 0$.

5.5. [10] $\left(a_1^\alpha + a_2^\alpha + \ldots + a_n^\alpha\right)^\beta \le \left(a_1^\beta + a_2^\beta + \ldots + a_n^\beta\right)^\alpha$, *где* $0 < \beta < \alpha$ *и все* a_i *неотрицательны.*

5.6. [10] $8\left(x^3+y^3+z^3\right)^2 \ge 9\left(x^2+yz\right)\left(y^2+zx\right)\left(z^2+xy\right)$, *где* $x, y, z \ge 0$.

5.7*. [10] $\dfrac{a_1}{s-a_1} + \dfrac{a_2}{s-a_2} + \ldots + \dfrac{a_n}{s-a_n} \ge \dfrac{n}{n-1}$, *где* $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, $n \ge 2$, $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

5.8. [8] (Неравенство Шура) $x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \ge x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2$, *где* $x, y, z \ge 0$.

5.9.[A] $3(x+y+z)(x+y)(y+z)(z+x) \ge 8(xy+yz+zx)^2$, *где* $x, y, z \ge 0$.

5.10*.[A] $8\left(x^3+y^3+z^3\right)(xy+yz+zx) \ge 3(x+y)(y+z)(z+x)\left(x^2+y^2+z^2\right)$, *где* $x, y, z \ge 0$.

5.11*.[A] $27(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2 \ge 64(x+y+z)^3 xyz$, *где* $x, y, z \ge 0$.

5.12*.[1] $\dfrac{xy(1-x)(1-y)}{(1-xy)^2} < \dfrac{1}{4}$, *где* $x, y \in (0;1)$.

5.13. (Неравенство Карлсона)

$$\sqrt{\frac{xy+yz+zx}{3}} \le \sqrt[3]{\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8}},$$ *где* $x, y, z \ge 0$.

5.14*.[A] $\dfrac{a^3}{a^2+b^2} + \dfrac{b^3}{b^2+c^2} + \dfrac{c^3}{c^2+a^2} \ge \dfrac{a+b+c}{2}$ *для любых* a, b, $c > 0$.

5.15*.[A] *Пусть* $F(x, y, z)$ *— симметрический и однородный порядка 3 многочлен трех переменных. Для того, чтобы для любых неотрицательных* x, y, *и* z *выполнялось неравенство* $F(x, y, z) \ge 0$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$F(1,1,1) \ge 0, \quad F(1,1,0) \ge 0 \quad \text{и} \quad F(1,0,0) \ge 0.$$

Глава 6

ЦИКЛИЧЕСКИЕ И КРУГОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Определение 1. Неравенство от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($n \geq 2$) вида

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee g(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где символ $\vee$ означает один из знаков неравенств $>$, $<$, $\geq$ или $\leq$, называется циклическим, если для любого $k \in \{2, \ldots, n\}$ справедливы тождества

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}),$$

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}).$$

Другими словами, неравенство является циклическим, если его левая и правая части не меняют своего значения при любой циклической перестановке переменных.

Среди циклических неравенств выделяются так называемые круговые неравенства.

Определение 2. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – два набора чисел, где в первом наборе все числа положительные, во втором – рациональные. Положим

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} \ldots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} x_n^{\alpha_n} +$$

$$+ x_n^{\alpha_1} x_1^{\alpha_2} x_2^{\alpha_3} \ldots x_{n-2}^{\alpha_{n-1}} x_{n-1}^{\alpha_n} + x_{n-1}^{\alpha_1} x_n^{\alpha_2} x_1^{\alpha_3} \ldots x_{n-3}^{\alpha_{n-1}} x_{n-2}^{\alpha_n} + \ldots$$

$$\ldots + x_2^{\alpha_1} x_3^{\alpha_2} x_4^{\alpha_3} \ldots x_n^{\alpha_{n-1}} x_1^{\alpha_n}.$$

Круговым неравенством будем называть неравенство вида

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \vee A(x_1, x_2, \ldots, x_n; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ – два набора рациональных чисел такие, что

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n, \qquad (22)$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ – положительные переменные.

Идея доказательства кругового неравенства вида

$$A(x_1, \ldots, x_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \geq A(x_1, \ldots, x_n; \beta_1, \ldots, \beta_n) \qquad (23)$$

состоит в том, чтобы представить каждое слагаемое, входящее в сумму из правой части неравенства, в виде произведения степеней выражений, входящих в сумму из левой части неравенства, с неотрицательными показателями. Возьмем первое слагаемое из правой части и представим его в виде

$$\left(x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}\right)^{r_1}\left(x_n^{\alpha_1}x_1^{\alpha_2}\ldots x_{n-1}^{\alpha_n}\right)^{r_2}\ldots\left(x_2^{\alpha_1}x_3^{\alpha_2}\ldots x_1^{\alpha_n}\right)^{r_n}=x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\ldots x_n^{\beta_n}, \tag{24}$$

где $r_1, r_2, \ldots, r_n$ – неизвестные показатели. Раскрыв скобки в левой части равенства, перемножив степени с одинаковыми основаниями и приравняв показатели степеней с одинаковыми основаниями, стоящих в левой и правой части, получим систему из n уравнений

$$\begin{cases}\alpha_1 r_1+\alpha_2 r_2+\alpha_3 r_3+\ldots+\alpha_n r_n=\beta_1,\\ \alpha_2 r_1+\alpha_3 r_2+\alpha_4 r_3+\ldots+\alpha_1 r_n=\beta_2,\\ \alpha_3 r_1+\alpha_4 r_2+\alpha_5 r_3+\ldots+\alpha_2 r_n=\beta_3,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_n r_1+\alpha_1 r_2+\alpha_2 r_3+\ldots+\alpha_{n-1} r_n=\beta_n\end{cases} \tag{25}$$

от n неизвестных $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Предположим, что эта система имеет решение $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$, где $r_1, r_2, \ldots, r_n \geq 0$. Тогда все числа $r_1, r_2, \ldots, r_n$ рациональны и $r_1+r_2+\ldots+r_n=1$. Действительно, сложив все уравнения системы (25), после вынесения общего множителя за скобки получим равенство $(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)(r_1+r_2+\ldots+r_n)=$ $=\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n$, откуда, учитывая равенство (22), получаем $r_1+r_2+\ldots+r_n=1$ (если только обе части равенства (22) не равны нулю). Заметим также, что, кроме равенства (24), будут иметь место равенства

$$\left(x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}\right)^{r_n}\left(x_n^{\alpha_1}x_1^{\alpha_2}\ldots x_{n-1}^{\alpha_n}\right)^{r_1}\ldots\left(x_2^{\alpha_1}x_3^{\alpha_2}\ldots x_1^{\alpha_n}\right)^{r_{n-1}}=x_n^{\beta_1}x_1^{\beta_2}\ldots x_{n-1}^{\beta_n},$$

$$\left(x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}\right)^{r_{n-1}}\left(x_n^{\alpha_1}x_1^{\alpha_2}\ldots x_{n-1}^{\alpha_n}\right)^{r_n}\ldots\left(x_2^{\alpha_1}x_3^{\alpha_2}\ldots x_1^{\alpha_n}\right)^{r_{n-2}}=$$
$$=x_{n-1}^{\beta_1}x_n^{\beta_2}\ldots x_{n-2}^{\beta_n},$$

. . . .

$$\left(x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}\right)^{r_2}\left(x_n^{\alpha_1}x_1^{\alpha_2}\ldots x_{n-1}^{\alpha_n}\right)^{r_3}\ldots\left(x_2^{\alpha_1}x_3^{\alpha_2}\ldots x_1^{\alpha_n}\right)^{r_1}=x_2^{\beta_1}x_3^{\beta_2}\ldots x_1^{\beta_n}. \tag{26}$$

Докажем теперь следующее утверждение.

Теорема 6.1. *Пусть* $r_1, r_2, \ldots, r_n$ – *неотрицательные рациональные числа такие, что* $r_1+r_2+\ldots+r_n=1$; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – *произвольные положительные числа. Тогда*

$$x_1 r_1+x_2 r_2+\ldots+x_n r_n \geq x_1^{r_1}x_2^{r_2}\ldots x_n^{r_n}. \tag{27}$$

Доказательство. Можно считать, что числа $r_1, r_2, \ldots, r_n$ – обыкновенные дроби с одинаковыми знаменателями. Если это не так, то приведем их к общему знаменателю. Пусть $r_1 = \frac{k_1}{m}$, $r_2 = \frac{k_2}{m}$, …, $r_n = \frac{k_n}{m}$, где m – натуральное, $k_1, k_2, \ldots, k_n$ – целые неотрицательные числа, причем $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = m$ (следует из равенства $r_1 + r_2 + \ldots + r_n = 1$). Тогда исходное неравенство можно переписать в виде

$$\frac{x_1 k_1 + x_2 k_2 + \ldots + x_n k_n}{m} \geq \sqrt[m]{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}},$$

или

$$\frac{\overbrace{x_1 + \ldots + x_1}^{k_1} + \overbrace{x_2 + \ldots + x_2}^{k_2} + \ldots + \overbrace{x_n + \ldots + x_n}^{k_n}}{k_1 + k_2 + \ldots + k_n} \geq$$

$$\geq \sqrt[m]{\underbrace{x_1 \cdot \ldots \cdot x_1}_{k_1} \cdot \underbrace{x_2 \cdot \ldots \cdot x_2}_{k_2} \cdot \underbrace{x_n \cdot \ldots \cdot x_n}_{k_n}}.$$

Последнее неравенство следует из неравенства Коши для m переменных.

Из равенств (24) и (26), применяя теорему 6.1, получаем

$$r_1 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} + r_2 x_n^{\alpha_1} x_1^{\alpha_2} \ldots x_{n-1}^{\alpha_n} + \ldots + r_n x_2^{\alpha_1} x_3^{\alpha_2} \ldots x_1^{\alpha_n} \geq x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \ldots x_n^{\beta_n},$$

$$r_n x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} + r_1 x_n^{\alpha_1} x_1^{\alpha_2} \ldots x_{n-1}^{\alpha_n} + \ldots + r_{n-1} x_2^{\alpha_1} x_3^{\alpha_2} \ldots x_1^{\alpha_n} \geq x_n^{\beta_1} x_1^{\beta_2} \ldots x_{n-1}^{\beta_n},$$

. . . .

$$r_2 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} + r_3 x_n^{\alpha_1} x_1^{\alpha_2} \ldots x_{n-1}^{\alpha_n} + \ldots + r_1 x_2^{\alpha_1} x_3^{\alpha_2} \ldots x_1^{\alpha_n} \geq x_2^{\beta_1} x_3^{\beta_2} \ldots x_1^{\beta_n}.$$

Сложив их, получим неравенство (23).

Замечание. Если в решении системы (25) хотя бы одно из значений r_i отрицательно, то неравенство (23) неверно, т.е. можно указать набор переменных $x_1, x_2 \ldots, x_n$, при котором левая часть этого неравенства меньше правой.

Задача 6.1. [8] *Докажите, что для любых a, b, $c > 0$ справедливо неравенство*

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b}.$$

Решение. Данное неравенство является круговым. Представим первое слагаемое правой части неравенства в виде

$$\frac{a^2}{c} = \left(\frac{a^3}{bc}\right)^x \left(\frac{b^3}{ca}\right)^y \left(\frac{c^3}{ab}\right)^z. \qquad (28)$$

Последнее равенство перепишем следующим образом:

$$a^2 b^0 c^{-1} = a^{3x-y-z} \cdot b^{-x+3y-z} \cdot c^{-x-y+3z}.$$

Приравнивая показатели степеней переменных a, b, c, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - y - z = 2, \\ -x + 3y - z = 0, \\ -x - y + 3z = -1, \end{cases}$$

решая которую, находим $x = \frac{3}{4}$, $y = \frac{1}{4}$, $z = 0$. Из равенства (28) и неравенства (27) получаем неравенства

$$\frac{a^2}{c} \le \frac{3}{4} \cdot \frac{a^3}{bc} + \frac{1}{4} \cdot \frac{b^3}{ca} + 0 \cdot \frac{c^3}{ab},$$

$$\frac{b^2}{a} \le 0 \cdot \frac{a^3}{bc} + \frac{3}{4} \cdot \frac{b^3}{ca} + \frac{1}{4} \cdot \frac{c^3}{ab},$$

$$\frac{c^2}{b} \le \frac{1}{4} \cdot \frac{a^3}{bc} + 0 \cdot \frac{b^3}{ca} + \frac{3}{4} \cdot \frac{c^3}{ab},$$

сложив которые, получим исходное неравенство.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Докажите неравенства:

6.2. [8] $\frac{a^{10}}{c} + \frac{b^{10}}{a} + \frac{c^{10}}{b} \ge a^8 b + b^8 c + c^8 a$ *для любых* $a, b, c > 0$.

6.3. [A] $\frac{x^2 y}{z} + \frac{y^2 z}{x} + \frac{z^2 x}{y} \ge xy + yz + zx$ *для любых* $x, y, z > 0$.

6.4. [A] $\frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy} \ge \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ *для любых* $x, y, z > 0$.

6.5. [A] $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \ge x + y + z$ *для любых* $x, y, z > 0$.

6.6. [A] $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \ge \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ *для любых* $x, y, z > 0$.

6.7. [A] $(1 + x_1 x_2)(1 + x_2 x_3)\ldots(1 + x_{n-1} x_n)(1 + x_n x_1) \le$
$\le \left(1 + x_1^2\right)\left(1 + x_2^2\right)\ldots\left(1 + x_n^2\right)$ *для любых* $x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0$.

6.8*. [11] $\left(1 + \frac{a_1^2}{a_2}\right)\left(1 + \frac{a_2^2}{a_3}\right)\ldots\left(1 + \frac{a_n^2}{a_1}\right) \ge (1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n)$ *для любых* $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$.

6.9*. [11] $\frac{x_1}{x_2 + x_n} + \frac{x_2}{x_3 + x_1} + \ldots + \frac{x_k}{x_{k+1} + x_{k-1}} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_2 + x_{n-2}} +$

$\ldots + \dfrac{x_{n-1}}{x_n + x_{n-2}} + \dfrac{x_n}{x_1 + x_{n-1}} \geq 2$ *для любых* $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ *и для всех натуральных* $n \geq 4$.

6.10*. [15, 5] $\dfrac{x_1}{x_2 + x_3} + \dfrac{x_2}{x_3 + x_4} + \ldots + \dfrac{x_k}{x_{k+1} + x_{k+2}} + \ldots$ $\ldots + \dfrac{x_{n-1}}{x_n + x_1} + \dfrac{x_n}{x_1 + x_2} \geq \dfrac{n}{4}$ *для любых* $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ *и для всех натуральных* $n \geq 3$.

6.11*. [A] $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} \geq a + b + c$, *где* a, b, c *положительны и* $abc = 1$.

Глава 7

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Под иррациональными неравенствами будем понимать любое неравенство вида

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee g(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где f и g – рациональные функции, а в качестве одного или нескольких аргументов выступает выражение, являющееся корнем из рациональной функции. Напомним, что рациональная функция – это функция, которую можно представить в виде частного двух многочленов (последние, в частности, могут иметь нулевую степень). При доказательстве подобных неравенств используются методы, описанные в предыдущих параграфах, а также некоторые специфические, например возведение в степень обеих частей неравенства с тем, чтобы избавиться от иррациональности.

Задача 7.1. *Докажите, что* $x + y - \sqrt{x^2 + y^2} > 0$, *где* x, $y > 0$.

Решение. Рассмотрим равносильное неравенство $x + y > \sqrt{x^2 + y^2}$. Так как обе части неравенства положительны, то при возведении в квадрат обеих частей последнего неравенства получим $x^2 + y^2 + 2xy > x^2 + y^2$, что, очевидно, верно.

Замечание. Если $x, y \geq 0$, то утверждение останется справедливым, если в формулировке задачи заменить знак неравенства нестрогим.

Задача 7.2. *Докажите, что* $\sqrt{x + y} \geq \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{2}}$, *где* $x, y \geq 0$.

Решение. Возведя в квадрат обе части неравенства, перейдем к равносильному неравенству $2(x + y) \geq x + y + 2\sqrt{xy}$, что равносильно $x + y \geq 2\sqrt{xy}$, варианту записи неравенства Коши.

Задача 7.3. *Докажите, что* $\sqrt{1 + x} \leq 1 + \dfrac{x}{2}$, *где* $x \geq 0$.

Решение. Возведя в квадрат обе части неравенства, получим равносильное верное неравенство $1 + x \leq 1 + x + \dfrac{x^2}{4}$.

Используя эти простые неравенства, можно доказывать более сложные.

Задача 7.4. [A] *Докажите, что* $\dfrac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{y}+\sqrt{z}}+\dfrac{\sqrt{y+z}}{\sqrt{z}+\sqrt{x}}+$ $+\dfrac{\sqrt{z+x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\ge\dfrac{3}{\sqrt{2}}$, *где* $x,\ y,\ z>0$.

Решение. Трижды применив неравенство из задачи 7.2, получаем

$$\frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{y}+\sqrt{z}}+\frac{\sqrt{y+z}}{\sqrt{z}+\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{z+x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\ge$$

$$\ge\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{y}+\sqrt{z}}+\frac{\sqrt{y}+\sqrt{z}}{\sqrt{z}+\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{z}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right).$$

Обозначим $a=\sqrt{x}+\sqrt{y}$, $b=\sqrt{y}+\sqrt{z}$, $c=\sqrt{z}+\sqrt{x}$. Тогда будет достаточно доказать неравенство $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\ge3$ для $a,\ b,\ c>0$, а оно справедливо (см. задачу 2.6).

В предыдущей задаче мы использовали метод промежуточной оценки и метод замены переменных.

Задача 7.5. [A] *Докажите, что* $ab+a+b-a\sqrt{b^2+1}-$ $-b\sqrt{a^2+1}\ge0$, *где* $a,b\in[0;1]$.

Решение. Из неравенства задачи 7.3 следует, что $\sqrt{a^2+1}\le1+\dfrac{a^2}{2}$ и $\sqrt{b^2+1}\le1+\dfrac{b^2}{2}$, поэтому

$$ab+a+b-a\sqrt{b^2+1}-b\sqrt{a^2+1}\ge$$

$$\ge ab+a+b-a\left(1+\frac{b^2}{2}\right)-b\left(1+\frac{a^2}{2}\right)=ab\left(1-\frac{a+b}{2}\right)\ge0,$$

поскольку из условия $a,b\in[0;1]$ следует, что $\dfrac{a+b}{2}\le1$.

Задача 7.6. [A] *Докажите, что* $2(xy+yz+zx)\ge$ $\ge x\sqrt{y^2+z^2}+y\sqrt{x^2+z^2}+z\sqrt{x^2+y^2}$, *где* $x,y,z\ge0$.

Решение. Если $x=y=z=0$, то неравенство верно. Пусть z – наибольшая (не равная нулю) переменная. Поделив обе части неравенства на z^2 и сделав замену переменных $a=\dfrac{x}{z}$, $b=\dfrac{y}{z}$, мы придем к неравенству

$$2(ab+a+b)\ge a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2+b^2}$$

или к равносильному ему

$$\left(a+b-\sqrt{a^2+b^2}\right)+\left(2ab+a+b-a\sqrt{b^2+1}-b\sqrt{a^2+1}\right)\ge 0\,,$$

доказав которое для любых $a,b\in[0;1]$, получим требуемый результат. Поскольку слагаемое $a+b-\sqrt{a^2+b^2}$ неотрицательно при любых $a,b\ge 0$ (см. задачу 7.1), достаточно доказать неравенство

$$2ab+a+b-a\sqrt{b^2+1}-b\sqrt{a^2+1}\ge 0\,.$$

Но

$$2ab+a+b-a\sqrt{b^2+1}-b\sqrt{a^2+1}\ge ab+a+b-a\sqrt{b^2+1}-b\sqrt{a^2+1}$$

и

$$ab+a+b-a\sqrt{b^2+1}-b\sqrt{a^2+1}\ge 0$$

(см. задачу 7.5), что завершает доказательство исходного неравенства.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Докажите неравенства:

7.7. $\sqrt{a}+\sqrt{b}\ge\sqrt{a+b}$, *где* $a,b\ge 0$.

7.8. [A] $\sqrt{a+b+1}\le\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}-1$, *где* $a,b\ge 0$.

7.9. [A] $\sqrt{\dfrac{a}{b+d}}+\sqrt{\dfrac{b}{c+a}}+\sqrt{\dfrac{c}{d+b}}+\sqrt{\dfrac{d}{a+c}}>2$, *где* $a,b,c,d>0$.

7.10.[A] $\sqrt{x}(y+z)+\sqrt{y}(z+x)+\sqrt{z}(x+y)\ge x\sqrt{y+z}+y\sqrt{z+x}+z\sqrt{x+y}$, где $x,y,z\ge 0$.

7.11. $1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}\le\sqrt{1+x}$, *где* $x,y\ge 0$.

7.12. [A] $\sqrt{(x+y)(y+z)}+\sqrt{(y+z)(z+x)}+\sqrt{(z+x)(x+y)}\ge 2\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)$, *где* $x,y,z\ge 0$.

7.13. [A] $\dfrac{(x+y)(y+z)}{\sqrt{zx}}+\dfrac{(y+z)(z+x)}{\sqrt{xy}}+\dfrac{(z+x)(x+y)}{\sqrt{yz}}\ge 4\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)$, *где* $x,\ y,\ z>0$.

7.14. [A] $\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}\ge\sqrt{2x}+\sqrt{2y}+\sqrt{2z}$, *где* $x,y,z\ge 0$.

7.15*. [1] $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\le\frac{2}{\sqrt{1+xy}}$ *для любых значений* $x,y\in[0;1]$.

7.16*. [A] $(x+y+z)^2\ge 2\left(x\sqrt{y^2+z^2}+y\sqrt{z^2+x^2}+z\sqrt{x^2+y^2}\right)$ *для любых* $x,y,z\ge 0$.

7.17*. [A] $\sqrt{\frac{x}{x+y}}+\sqrt{\frac{y}{y+z}}+\sqrt{\frac{z}{z+x}}>1$, *где* $x,\ y,\ z>0$.

7.18*. [A] $\sqrt{\frac{x^3}{y+z}}+\sqrt{\frac{y^3}{z+x}}+\sqrt{\frac{z^3}{x+y}}\ge\frac{x+y+z}{\sqrt{2}}$, *где* $x,\ y,\ z>0$.

7.19*. [A] $\sqrt{x^2+y^2}\le\left(\sqrt{2}-1\right)\left(x+y+\sqrt{2}\right)$, *где* $x,y\in[0;1]$.

7.20*. [A] $a\sqrt{e^2+b^2}+b\sqrt{a^2+c^2}+c\sqrt{b^2+d^2}+d\sqrt{c^2+e^2}+e\sqrt{d^2+a^2}\le\frac{1}{2}(a+b+c+d+e)^2$ *для всех* $a,b,c,d,e\ge 0$.

Глава 8

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТРАНСНЕРАВЕНСТВ

Определение 1. Пусть $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ – две конечные последовательности действительных чисел, n – натуральное число. Будем говорить, что эти последовательности одномонотонны, если для любых двух номеров $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ из условия $a_i < a_j$ следует, что $b_i \le b_j$. Конечные последовательности $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ будем называть разномонотонными, если для любых двух номеров $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ из условия $a_i < a_j$ следует, что $b_i \ge b_j$.

Это определение эквивалентно следующему:

Определение 2. Последовательности $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ одномонотонные тогда и только тогда, когда найдется перестановка $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ чисел 1, 2, …, n такая, что $a_{j_1} \le a_{j_2} \le \ldots \le a_{j_n}$ и $b_{j_1} \le b_{j_2} \le \ldots \le b_{j_n}$.

Последовательности $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ разномонотонные тогда и только тогда, когда найдется перестановка $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ чисел 1, 2, …, n такая, что $a_{j_1} \le a_{j_2} \le \ldots \le a_{j_n}$ и $b_{j_1} \ge b_{j_2} \ge \ldots \ge b_{j_n}$.

Определение 3. Сверткой конечных последовательностей $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ называется число $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots$ $\ldots + a_n b_n$, которое мы будем обозначать через

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{bmatrix}.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 8.1. *Пусть* $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *и* $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ – *конечные последовательности и* $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ – *произвольная перестановка чисел* 1, 2, …, n, *где* $n \ge 2$. *Тогда*

а) *если A и B одномонотонны, то*

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_{i_1} & b_{i_2} & \ldots & b_{i_n} \end{bmatrix}; \qquad (29)$$

б) *если A и B разномонотонны, то*

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_{i_1} & b_{i_2} & \ldots & b_{i_n} \end{bmatrix}. \qquad (30)$$

Эти неравенства носят название «транснеравенства».

Доказательство. Докажем неравенство (29) индукцией по n. Пусть $A=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ и $B=(b_1,b_2,\dots,b_n)$ одномонотонны. Проверим, что для $n = 2$ неравенство (29) верно. Для этого достаточно доказать, что $a_1b_1 + a_2b_2 \ge a_1b_2 + a_2b_1$. Это равносильно неравенству $(a_1-a_2)(b_1-b_2)\ge 0$, которое верно в силу того, что значения a_1-a_2 и b_1-b_2 оба неотрицательны либо оба неположительны. Предположим, что неравенство (29) верно для некоторого $n = k$. Докажем, что тогда оно верно и для $n = k + 1$. Для этого необходимо проверить, что

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_k & a_{k+1} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_k & b_{k+1} \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_k & a_{k+1} \\ b_{i_1} & b_{i_2} & \dots & b_{i_k} & b_{i_{k+1}} \end{bmatrix}. \qquad (31)$$

При этом можно считать, что

$$a_1 \le a_2 \dots \le a_{k+1} \text{ и } b_1 \le b_2 \dots \le b_{k+1}. \qquad (32)$$

Действительно, если это не так, то согласно определению 2 найдется перестановка $(j_1, j_2,\dots,i_{k+1})$ чисел 1, 2, ..., k + 1 такая, что $a_{j_1} \le a_{j_2} \le \dots \le a_{j_{k+1}}$ и $b_{j_1} \le b_{j_2} \le \dots \le b_{j_{k+1}}$. Тогда, введя новые обозначения $a'_m = a_{j_m}$ и $b'_m = b_{j_m}$ для $m\in\{1,2,\dots,k+1\}$, получим, что конечные последовательности $(a'_1,a'_2,\dots,a'_{k+1})$ и $(b'_1,b'_2,\dots,b'_{k+1})$ одномонотонны и удовлетворяют условиям (32).

Запишем неравенство (31) в виде

$$a_1b_1 + \dots + a_kb_k + a_{k+1}b_{k+1} \ge a_1b_{i_1} + \dots + a_kb_{i_k} + a_{k+1}b_{i_{k+1}}. \qquad (33)$$

Если $i_{k+1} = k+1$, то $(i_1,i_2,\dots,i_k)$ − перестановка чисел 1, 2, ..., k, тогда по индукционному предположению имеем $a_1b_1 + \dots + a_kb_k \ge a_1b_{i_1} + \dots + a_kb_{i_k}$, откуда следует неравенство (33).

Пусть теперь $i_{k+1} = m \ne k+1$, а p − такой номер, что $i_p = k+1$. Тогда $m \le k$ и $p \le k$. Сумму $a_1b_{i_1} + \dots + a_kb_{i_k} + a_{k+1}b_{i_{k+1}}$ можно записать следующим образом:

$$\left(a_1b_{i_1} + \dots + a_{p-1}b_{i_{p-1}}\right) + a_pb_{k+1} + \left(a_{p+1}b_{i_{p+1}} + \dots + a_kb_{i_k}\right) + a_{k+1}b_m.$$

Так как $a_p \le a_{k+1}$ и $b_{k+1} \ge b_m$, то по уже доказанному имеем

$$a_pb_{k+1} + a_{k+1}b_m \le a_pb_m + a_{k+1}b_{k+1},$$

тогда

$$\left(a_1b_{i_1} + \dots + a_{p-1}b_{i_{p-1}}\right) + a_pb_{k+1} + \left(a_{p+1}b_{i_{p+1}} + \dots + a_kb_{i_k}\right) + a_{k+1}b_m \le$$
$$\le \left(a_1b_{i_1} + \dots + a_{p-1}b_{i_{p-1}}\right) + a_pb_m + \left(a_{p+1}b_{i_{p+1}} + \dots + a_kb_{i_k}\right) + a_{k+1}b_{k+1} \le$$
$$\le (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_kb_k) + a_{k+1}b_{k+1}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\left(i_1,\ldots,i_{p-1},m,i_{p+1},\ldots,i_k\right)$ – перестановка чисел 1, 2, ..., k, и применили индукционное предположение. Индукционный переход осуществлен, таким образом, неравенство (29) верно для всех натуральных n. Аналогично доказывается и неравенство (30) для разномонотонных последовательностей.

Задача 8.1. [8] *Докажите неравенство* $a^3+b^3+c^3 \ge$ $+\,b^2c+c^2a$, *где* $a,b,c \ge 0$.

Решение. Рассмотрим две конечные последовательности (a,b,c) и $\left(a^2,b^2,c^2\right)$. Они одномонотонны, так как для неотрицательных x и y условие $x<y$ равносильно условию $x^2<y^2$. Применим к этим последовательностям транснеравенство (29). Получим

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} a & b & c \\ c^2 & a^2 & b^2 \end{bmatrix},$$

т.е. $a^3+b^3+c^3 \ge a^2b+b^2c+c^2a$.

Задача 8.2. [8] *Докажите неравенство*

$$a+b+c \le \frac{a^2+b^2}{2c}+\frac{b^2+c^2}{2a}+\frac{c^2+a^2}{2b},\ \text{где } a,\ b,\ c>0.$$

Решение. Рассмотрим конечные последовательности $\left(a^2,b^2,c^2\right)$ и $\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)$. Они разномонотонны, поскольку для x, $y>0$ условие $x^2<y^2$ равносильно условию $\frac{1}{x}>\frac{1}{y}$. Применим к этим последовательностям транснеравенство (30). Получим

$$\begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{c} & \frac{1}{a} \end{bmatrix},$$

т.е. $a+b+c \le \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}$. Аналогично получаем неравенство $a+b+c \le \frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}$. Сложив эти два неравенства и поделив обе части получившегося неравенства на 2, получим исходное.

Задача 8.3. (Неравенство Чебышёва) *Пусть имеются две конечные числовые последовательности* $A=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ *и* $B=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$. *Тогда* а) *если A и B одномонотонны, то*

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{n} \geq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n};$$

б) *если A и B разномонотонны, то*

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}.$$

Решение. а) Если A и B одномонотонны, то из транснеравенства (29) следует, что

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-k+1} & a_{n-k+2} & \ldots & a_n \\ b_k & b_{k+1} & \ldots & b_n & b_1 & \ldots & b_{k-1} \end{bmatrix}$$

для $k = 2, \ldots, n$. Сложив эти n неравенств почленно и поделив обе части получившегося неравенства на n^2, получим требуемое неравенство. Аналогично доказывается и пункт б).

В некоторых случаях для доказательства неравенств удобно применять весовое и обобщенное неравенства Чебышёва.

Теорема 8.2 (Весовое неравенство Чебышёва) *Пусть числа* $p_1, p_2, \ldots, p_n \geq 0$ *таковы, что* $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$ $(n \geq 2)$; $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ − *конечные последовательности. Тогда*

1) *если A и B одномонотонны, то*

$$(p_1a_1 + p_2a_2 + \ldots + p_na_n)(p_1b_1 + p_2b_2 + \ldots + p_nb_n) \leq$$
$$\leq p_1a_1b_1 + p_2a_2b_2 + \ldots + p_na_nb_n; \quad (34)$$

2) *если A и B разномонотонны, то*

$$(p_1a_1 + p_2a_2 + \ldots + p_na_n)(p_1b_1 + p_2b_2 + \ldots + p_nb_n) \geq$$
$$\geq p_1a_1b_1 + p_2a_2b_2 + \ldots + p_na_nb_n. \quad (35)$$

Эта теорема является прямым следствием следующего утверждения.

Теорема 8.3. (Обобщенное неравенство Чебышёва) *Пусть* $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ − *конечные последовательности* $(n \geq 2)$, *причем все* x_i *неотрицательны. Тогда*

1) *если A и B одномонотонны, то*

$$(x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n)(x_1b_1 + x_2b_2 + \ldots + x_nb_n) \leq$$
$$\leq (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)(x_1a_1b_1 + x_2a_2b_2 + \ldots + x_na_nb_n); \quad (36)$$

2) *если A и B разномонотонны, то*

$$\left(x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n\right)\left(x_1b_1 + x_2b_2 + \ldots + x_nb_n\right) \ge$$
$$\ge \left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right)\left(x_1a_1b_1 + x_2a_2b_2 + \ldots + x_na_nb_n\right). \quad (37)$$

Доказательство. Докажем неравенство (36) индукцией по n. В силу эквивалентности определений 1 и 2 одномонотонных последовательностей без ограничения общности можно считать, что A и B – неубывающие конечные последовательности. Проверим базу индукции. При $n = 2$ неравенство (36) равносильно

$$\left(x_1 + x_2\right)\left(x_1a_1b_1 + x_2a_2b_2\right) \ge \left(x_1a_1 + x_2a_2\right)\left(x_1b_1 + x_2b_2\right).$$

Раскрыв скобки, приведя подобные слагаемые и выполнив группировку, получим равносильное неравенство

$$x_1x_2\left(a_1 - a_2\right)\left(b_1 - b_2\right) \ge 0.$$

Оно верно, поскольку $a_1 \le a_2$ и $b_1 \le b_2$.

Предположим, что неравенство (36) верно для $n = k - 1$. Пусть

$$S_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1}, \quad S_2 = x_1a_1b_1 + x_2a_2b_2 + \ldots + x_{k-1}a_{k-1}b_{k-1},$$

$$S_3 = x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_{k-1}a_{k-1}, \quad S_4 = x_1b_1 + x_2b_2 + \ldots + x_{k-1}b_{k-1}.$$

Имеем неравенство $S_1S_2 \ge S_3S_4$. Докажем, что неравенство (36) верно для $n = k$, т.е.

$$\left(S_1 + x_k\right)\left(S_2 + x_ka_kb_k\right) \ge \left(S_3 + x_ka_k\right)\left(S_4 + x_kb_k\right).$$

Последнее неравенство равносильно

$$S_1S_2 - S_3S_4 + x_k\left(a_kb_kS_1 + S_2 - b_kS_3 - a_kS_4\right) \ge 0.$$

Из предположения индукции следует, что достаточно доказать неравенство $a_kb_kS_1 + S_2 - b_kS_3 - a_kS_4 \ge 0$. Подставив в левую часть неравенства вместо S_i соответствующие суммы, раскрыв скобки и сгруппировав слагаемые, получим следующую цепочку равенств:

$$a_kb_kS_1 + S_2 - b_kS_3 - a_kS_4 =$$
$$= x_1\left(a_kb_k + a_1b_1 - a_1b_k - a_kb_1\right) + x_2\left(a_kb_k + a_2b_2 - a_2b_k - a_kb_2\right) + \ldots$$
$$\ldots + x_{k-1}\left(a_kb_k + a_{k-1}b_{k-1} - a_{k-1}b_k - a_kb_{k-1}\right) =$$
$$= x_1\left(a_1 - a_k\right)\left(b_1 - b_k\right) + x_2\left(a_2 - a_k\right)\left(b_2 - b_k\right) + \ldots$$
$$\ldots + x_{k-1}\left(a_{k-1} - a_k\right)\left(b_{k-1} - b_k\right).$$

Отсюда, с учетом того, что $a_i - a_k \le 0$ и $b_i - b_k \le 0$ для всех $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$, имеем $a_kb_kS_1 + S_2 - b_kS_3 - a_kS_4 \ge 0$, что завершает доказательство неравенства (36). Неравенство (37) доказывается аналогично.

Задача 8.4. [А] *Докажите неравенство*

$$\frac{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}{a+b+c} \le \frac{ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)}{ab+bc+ca}$$

для всех положительных a, b, c.

Решение. *Первый способ.* Данное неравенство равносильно

$$(ab+bc+ca)\left((a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\right) \le$$

$$\le \left((a+b)+(b+c)+(c+a)\right)\left(ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\right),$$

т.е.

$$\left(\frac{ab}{a+b}\cdot(a+b)+\frac{ca}{c+a}\cdot(c+a)+\frac{bc}{b+c}\cdot(b+c)\right)\times$$

$$\times\left((a+b)^2+(c+a)^2+(b+c)^2\right) \le$$

$$\le \left((a+b)+(c+a)+(b+c)\right)\left(ab(a+b)+ca(c+a)+bc(b+c)\right). \tag{38}$$

Положим в неравенстве (36) $n = 3$, $X=(a+b,\ c+a,\ b+c)$, $A=\left(\frac{ab}{a+b}, \frac{ca}{c+a}, \frac{bc}{b+c}\right)$, $B=(a+b,\ c+a,\ b+c)$. Нетрудно заметить, что последовательности A и B одномонотонны, так как если $a \ge b \ge c$, то $\frac{ab}{a+b} \ge \frac{ca}{c+a} \ge \frac{bc}{b+c}$ и $a+b \ge c+a \ge b+c$. Из неравенства (36) получаем неравенство (38).

Второй способ. Домножив обе части неравенства на удвоенное произведение знаменателей, после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получим равносильное исходному неравенство $2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-a^2bc-ab^2c-abc^2\right) \ge 0$, т.е. $a^2(b-c)^2+b^2(c-a)^2+c^2(a-b)^2 \ge 0$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Докажите неравенства:

8.5. $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{b+c}}+\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{c+a}}+\frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}} \ge 0$, *где a, b, c* > 0.

8.6. [8] $\frac{a^2+b^2}{2c}+\frac{b^2+c^2}{2a}+\frac{c^2+a^2}{2b} \le \frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}$, *где a, b, c* > 0.

8.7. [8] $\dfrac{a_1}{s-a_1}+\dfrac{a_2}{s-a_2}+\ldots+\dfrac{a_n}{s-a_n}\ge\dfrac{n}{n-1}$, *где* $a_1,a_2,\ldots,a_n>0$, $n\ge 2$, $s=a_1+a_2+\ldots+a_n$.

8.8. [A] $\dfrac{a^3}{b^2+c^2}+\dfrac{b^3}{c^2+a^2}+\dfrac{c^3}{a^2+b^2}\ge\dfrac{a+b+c}{2}$, *где* $a,\ b,\ c>0$.

8.9. $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^3+b^3+c^3\right)\le 3\left(a^5+b^5+c^5\right)$, *где* $a,b,c\ge 0$.

8.10. [A] $\dfrac{a}{b^2+c^2}+\dfrac{b}{c^2+a^2}+\dfrac{c}{a^2+b^2}\ge\dfrac{3(a+b+c)}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}$, *где* $a,\ b,\ c>0$.

8.11. [A]

$\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}\le\dfrac{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)}$, *где* $a,\ b,\ c>0$.

8.12. [A] $\left(\dfrac{ab}{a+b}+\dfrac{bc}{b+c}+\dfrac{ca}{c+a}\right)(a+b+c)\ge 3abc\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}\right)$, *где* $a,\ b,\ c>0$.

8.13*. [A] $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}\le\dfrac{3(a+b+c)}{2(ab+bc+ca)}$, *где* $a,\ b,\ c>0$.

8.14*. [A] $\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{y+z}+\dfrac{1}{z+x}\le\dfrac{(x+y+z)^3}{2(xy+yz+zx)^2}$, *где* $x,\ y,\ z>0$.

8.15*. [A] $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\le\dfrac{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}{2(ab+bc+ca)}$, *где* $a,\ b,\ c>0$.

8.16*. [A] $\dfrac{ab}{a+b}+\dfrac{bc}{b+c}+\dfrac{ca}{c+a}\le\dfrac{3(ab+bc+ca)}{2(a+b+c)}$, *где* $a,\ b,\ c>0$.

8.17*. [A] $\dfrac{a(b+c)}{b^2+c^2}+\dfrac{b(c+a)}{c^2+a^2}+\dfrac{c(a+b)}{a^2+b^2}\ge\dfrac{3(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}$, *где* $a,\ b,\ c>0$.

8.18*. [A] $\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge(a+b+c)\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$, *где* $a,b,c\ge 0$.

8.19*. [A] $\left(a^2+b^2+c^2\right)(ab+bc+ca)\le(a+b+c)\left(a^3+b^3+c^3\right)$, *где* $a,b,c\ge 0$.

8.20*. [A] $\left(x_1^a + x_2^a + \ldots + x_n^a\right)\left(x_1^d + x_2^d + \ldots + x_n^d\right) \geq \left(x_1^b + x_2^b + \ldots + x_n^b\right)\left(x_1^c + x_2^c + \ldots + x_n^c\right)$, *где все* x_i *положительны,* $a < b \leq c < d$ *и* $a + d = b + c$.

8.21*. [A] $\left(\dfrac{x}{y+z} + \dfrac{y}{z+x} + \dfrac{z}{x+y}\right)(x+y+z) \geq \left(\dfrac{1}{x+y} + \dfrac{1}{y+z} + \dfrac{1}{z+x}\right)(xy + yz + zx)$ *для всех* $x, y, z > 0$.

8.22*. [A] $\left(\dfrac{x}{y+z} + \dfrac{y}{z+x} + \dfrac{z}{x+y}\right)(x+y+z) \leq \left(\dfrac{1}{x+y} + \dfrac{1}{y+z} + \dfrac{1}{z+x}\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$ *для всех* $x, y, z > 0$.

8.23*. [A] $(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x(y+z)} + \dfrac{1}{y(z+x)} + \dfrac{1}{z(x+y)}\right) \leq \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right)\left(\dfrac{x}{y+z} + \dfrac{y}{z+x} + \dfrac{z}{x+y}\right)$, *где* $x, y, z > 0$.

8.24*. [A] $\left(x^3 + y^3 + z^3\right)\left(\dfrac{1}{x(y+z)} + \dfrac{1}{y(z+x)} + \dfrac{1}{z(x+y)}\right) \geq \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\left(\dfrac{1}{x+y} + \dfrac{1}{y+z} + \dfrac{1}{z+x}\right)$, *где* $x, y, z > 0$.

8.25*. [A] $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geq \dfrac{3a^2(b+c) + 3b^2(c+a) + 3c^2(a+b)}{2\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right)}$, *где* $a, b, c > 0$.

8.26*. [A] $\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2 + \ldots + \operatorname{tg}\alpha_n \geq \dfrac{n(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \ldots + \sin\alpha_n)}{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \ldots + \cos\alpha_n}$, *где* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Глава 9

МЕТОД ШТУРМА

Во многих случаях эффективным средством установления истинности неравенства является так называемый метод Штурма, названный в честь немецкого математика Р.Штурма, предложившего этот метод в 1884 году. Он заключается в последовательном приближении значения исследуемой функции нескольких переменных к ее экстремальному (наибольшему или наименьшему) значению путем специальным образом организованного изменения значений этих переменных.

Для начала введем такие понятия, как «сдвигание» и «раздвигание» двух чисел с сохранением их суммы или с сохранением их произведения.

Определение 1. Пусть имеется пара чисел (x, y). Возьмем две пары чисел (x', y') и (x'', y'') такие, что $x + y = x' + y' = x'' + y''$ и $|x' - y'| < |x - y| < |x'' - y''|$. Тогда переход от пары чисел (x, y) к паре (x', y') будем называть сдвиганием чисел x, y с сохранением их суммы, а переход от пары чисел (x, y) к паре (x'', y'') будем называть раздвиганием чисел x, y с сохранением их суммы.

Если же взять две пары чисел (x', y') и (x'', y'') такие, что $xy = x'y' = x''y''$ и $|x' - y'| < |x - y| < |x'' - y''|$, то переход от пары чисел (x, y) к паре (x', y') будем называть сдвиганием чисел x, y с сохранением их произведения, а переход от пары чисел (x, y) к паре (x'', y'') будем называть раздвиганием чисел x, y с сохранением их произведения.

Докажем следующее утверждение:

Теорема 9.1. а) *При сдвигании двух неотрицательных чисел с сохранением их суммы произведение этих чисел увеличивается, а при раздвигании – уменьшается.*

б) *При сдвигании двух неотрицательных чисел с сохранением их произведения сумма этих чисел уменьшается, а при раздвигании – увеличивается (при этом предполагается, что при раздвигании числа остаются неотрицательными).*

Доказательство. а) Пусть $x, y \geq 0$, и пусть числа $x', y', x'', y'' \geq 0$ таковы, что

$$x + y = x' + y' = x'' + y'' \text{ и } |x' - y'| < |x - y| < |x'' + y''|. \quad (39)$$

Заметим, что для любых чисел a, b справедливо тождество $|a-b|^2+4ab=(a+b)^2$, т.е. $ab=\dfrac{(a+b)^2-|a-b|^2}{4}$. Из (39) следует, что

$$\frac{(x''+y'')^2-|x''-y''|^2}{4}<\frac{(x+y)^2-|x-y|^2}{4}<\frac{(x'+y')^2-|x'-y'|^2}{4},$$

откуда получаем, что $x''y''<xy<x'y'$.

б) Пусть $x,y\ge 0$, и пусть числа $x',y',x'',y''\ge 0$ таковы, что

$$xy=x'y'=x''y'' \text{ и } |x'-y'|<|x-y|<|x''-y''|. \qquad (40)$$

Так как для любых неотрицательных чисел a, b имеет место равенство $a+b=\sqrt{|a-b|^2+4ab}$, то из (40) следует, что

$$\sqrt{|x'-y'|^2+4x'y'}<\sqrt{|x-y|^2+4xy}<\sqrt{|x''-y''|^2+4x''y''},$$

откуда получаем, что $x'+y'<x+y<x''+y''$.

Утверждение 9.2. *Пусть* $0\le a<b$, *и пусть* $c\in(a;b)$. *Тогда найдутся* $d\in(a;b)$ *и* $f\in[a;b)$ *такие, что* $a+b=c+d$ *и* $ab=$ $=cf$; *при этом очевидно, что* $|c-d|<|a-b|$ *и* $|c-f|<|a-b|$.

Доказательство. Очевидно, что d и f определены формулами $d=a+b-c$, $f=\dfrac{ab}{c}$. Осталось показать, что они принадлежат указанным промежуткам. Так как $b-c>0$, то $d=a+(b-c)>a$, а так как $a-c<0$, то $d=b+(a-c)<b$, т.е. $d\in(a;b)$. Так как $\dfrac{b}{c}>1$, то $f=a\cdot\dfrac{b}{c}\ge a$ (причем равенство достигается в случае, когда $a=0$), а так как $\dfrac{a}{c}<1$, то $f=b\cdot\dfrac{a}{c}<b$, т.е. $f\in[a;b)$.

Рассмотрим теперь механизм действия метода Штурма на примере доказательства неравенства Коши, которое уже было доказано методом математической индукции в главе 4 (см. задачу 4.5).

Задача 9.1. *Докажите неравенство Коши*

$$\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\ge\sqrt[n]{x_1\ldots x_n} \qquad (41)$$

для всех неотрицательных $x_1,\ldots,x_n$.

Решение. Положим $c=\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}$. Тогда исходное неравенство запишется в виде

$$\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\ge c. \qquad (42)$$

Заметим, что это неравенство реализуется в форме равенства при условии $x_1 = \ldots = x_n = c$. Это наводит нас на мысль, что для того, чтобы функция n переменных $f(x_1,\ldots,x_n) = \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$ достигла своего наименьшего значения из всех возможных при условии, что величина $\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$ остается неизменной и равной c, нужно последовательно сдвигать эти переменные с сохранением их произведения до тех пор, пока они все не станут равными.

Итак, случай, когда все $x_1,\ldots,x_n$ равны c, мы рассмотрели, в этом случае исходное неравенство верно. Если $c = 0$, то неравенство также верно. Пусть теперь хотя бы одна из переменных $x_1,\ldots,x_n$ не равна c и $c \neq 0$. Тогда обязательно найдутся две переменные такие, что одна из них меньше c, а другая больше c (это утверждение легко доказывается). Поскольку исходное неравенство симметрично и все переменные в нем равноправны, то без ограничения общности мы можем считать, что этими переменными являются x_k и x_{k+1}, причем $x_k < c < x_{k+1}$, а все $x_1,\ldots,x_{k-1}$ и только они равны c (может оказаться, что нет переменных, равных c, тогда полагаем $k = 1$). Из утверждения 9.2 следует, что найдется $x''_{k+1} \in [x_k; x_{k+1})$ такое, что $cx''_{k+1} = x_k x_{k+1}$. Положим $x'_k = c$. Сдвинем теперь числа x_k и x_{k+1} с сохранением их произведения так, чтобы они перешли в числа x'_k и x''_{k+1}. Остальные переменные оставим без изменения. Докажем, что при переходе от переменных $(x_1,\ldots,x_{k-1},x_k,x_{k+1},x_{k+2},\ldots,x_n)$ к переменным $(x_1,\ldots,x_{k-1},x'_k,x''_{k+1},$ $x_{k+2},\ldots,x_n)$ значение f уменьшится. Действительно, поскольку при сдвигании двух неотрицательных чисел с сохранением произведения их сумма уменьшается, то $x_k + x_{k+1} > x'_k + x''_{k+1}$, поэтому

$$f(x_1,\ldots,x_{k-1},x_k,x_{k+1},x_{k+2},\ldots,x_n) =$$

$$= \frac{x_1 + \ldots + x_{k-1} + x_k + x_{k+1} + x_{k+2} + \ldots + x_n}{n} >$$

$$= \frac{x_1 + \ldots + x_{k-1} + x'_k + x''_{k+1} + x_{k+2} + \ldots + x_n}{n} =$$

$$= f(x_1,\ldots,x_{k-1},x'_k,x''_{k+1},x_{k+2},\ldots,x_n).$$

Произведение всех переменных из нового набора также равно c^n, причем в новом наборе число c будет встречаться по меньшей мере на один раз больше, чем в старом. Таким образом, последовательно сдвигая пары переменных описанным выше способом до тех пор, пока все они не станут равны c, мы получим цепочку неравенств

$$f(x_1,\dots,x_{k-1},x_k,x_{k+1},x_{k+2},\dots,x_n) >$$

$$> f(x_1,\dots,x_{k-1},x_k',x_{k+1}'',x_{k+2},\dots,x_n) > \dots$$

$$\dots > f(x_1,\dots,x_{k-1},x_k',x_{k+1}',x_{k+2}',\dots,x_n'') = c\,.$$

Неравенство (42) доказано.

Замечание. Из доказательства следует, что неравенство Коши реализуется в форме равенства только при равных значениях переменных, так как если хотя бы две переменные различны, то имеется по меньшей мере одно строгое неравенство в цепочке неравенств, приведенной выше.

Задача 9.2. *Докажите, что для любых положительных чисел* $x_1,x_2,\dots,x_n$ *(где* $n\ge 2$*), удовлетворяющих условию* $x_1+x_2+\dots+x_n=1$*, справедливо неравенство*

$$\left(\frac{1}{x_1^2}-1\right)\left(\frac{1}{x_2^2}-1\right)\dots\left(\frac{1}{x_n^2}-1\right)\ge\left(n^2-1\right)^n. \qquad (43)$$

Решение. Рассмотрим функцию n переменных

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\left(\frac{1}{x_1^2}-1\right)\left(\frac{1}{x_2^2}-1\right)\dots\left(\frac{1}{x_n^2}-1\right).$$

Если все переменные $x_1,x_2,\dots,x_n$ равны, то $x_1=x_2=\dots=x_n=\frac{1}{n}$ и неравенство (43) верно, поскольку его левая и правая части равны. Пусть теперь не все переменные равны, тогда найдутся две переменные, одна из которых меньше $\frac{1}{n}$, а другая больше. Поскольку исходное неравенство симметрично, то без ограничения общности мы можем считать, что этими переменными являются x_k и x_{k+1}, причем $x_k<\frac{1}{n}<x_{k+1}$, а все $x_1,\dots,x_{k-1}$ и только они равны $\frac{1}{n}$ (может оказаться, что нет переменных, равных $\frac{1}{n}$, тогда полагаем $k=1$). Положим $x_k'=\frac{1}{n}$. Из утверждения 9.2 следует, что найдется $x_{k+1}''\in(x_k;\,x_{k+1})$ такое, что $x_k'+x_{k+1}''=x_k+x_{k+1}$. Сдвинем теперь числа x_k и x_{k+1} с сохранением их суммы так, чтобы они перешли в числа x_k' и x_{k+1}''. Остальные переменные оставим без изменения. Докажем, что при переходе от переменных $(x_1,\dots,x_{k-1},x_k,x_{k+1},x_{k+2},\dots,x_n)$ к переменным $(x_1,\dots,x_{k-1},x_k',x_{k+1}'',x_{k+2},\dots,x_n)$ значение функции f

уменьшится. Действительно, поскольку при сдвигании двух положительных чисел с сохранением суммы их произведение увеличивается, то $x_k x_{k+1} < x'_k x''_{k+1}$, поэтому

$$\left(\frac{1}{x_k^2}-1\right)\left(\frac{1}{x_{k+1}^2}-1\right)=\frac{1-\left(x_k+x_{k+1}\right)^2}{x_k^2 x_{k+1}^2}+\frac{2}{x_k x_{k+1}}+1>$$

$$>\frac{1-\left(x'_k+x''_{k+1}\right)^2}{x_k'^2 x_{k+1}''^2}+\frac{2}{x'_k x''_{k+1}}+1=\left(\frac{1}{x_k'^2}-1\right)\left(\frac{1}{x_{k+1}''^2}-1\right),$$

следовательно,

$$f\left(x_1,\ldots,x_{k-1},x_k,x_{k+1},x_{k+2},\ldots,x_n\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{x_1^2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{x_{k-1}^2}-1\right)\left(\frac{1}{x_k^2}-1\right)\left(\frac{1}{x_{k+1}^2}-1\right)\left(\frac{1}{x_{k+2}^2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{x_n^2}-1\right)>$$

$$>\left(\frac{1}{x_1^2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{x_{k-1}^2}-1\right)\left(\frac{1}{x_k'^2}-1\right)\left(\frac{1}{x_{k+1}''^2}-1\right)\left(\frac{1}{x_{k+2}^2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{x_n^2}-1\right)=$$

$$=f\left(x_1,\ldots,x_{k-1},x'_k,x''_{k+1},x_{k+2},\ldots,x_n\right).$$

Сумма всех переменных из нового набора будет также равна 1, причем в новом наборе число $\frac{1}{n}$ будет встречаться по меньшей мере на один раз больше, чем в старом. Таким образом, последовательно сдвигая пары переменных описанным выше способом до тех пор, пока все они не станут равны $\frac{1}{n}$, мы получим цепочку неравенств

$$f\left(x_1,\ldots,x_{k-1},x_k,x_{k+1},x_{k+2},\ldots,x_n\right)>$$

$$>f\left(x_1,\ldots,x_{k-1},x'_k,x''_{k+1},x_{k+2},\ldots,x_n\right)>\ldots$$

$$\ldots>f\left(x_1,\ldots,x_{k-1},x'_k,x'_{k+1},x'_{k+2},\ldots,x''_n\right)=\left(n^2-1\right)^n.$$

Неравенство (43) доказано.

Задача 9.3. [24] *Докажите, что для любых* $x,y,z\ge 0$ *таких, что* $x+y+z=\frac{1}{2}$, *справедливо неравенство*

$$\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-y}{1+y}\cdot\frac{1-z}{1+z}\ge\frac{1}{3}. \qquad (44)$$

Решение. Заметим, что неравенство реализуется в форме равенства, когда две переменные равны нулю, а третья равна $\frac{1}{2}$.

Это наводит на мысль о том, что для доказательства неравенства надо последовательно раздвигать переменные с сохранением их суммы.

Положим $I = \left[0; \frac{1}{2}\right]$. Если все переменные совпадают с концами отрезка I, то неравенство верно (этот случай рассмотрен выше). Пусть теперь имеется одна переменная, не совпадающая ни с нулем, ни с $\frac{1}{2}$. Тогда найдется еще одна такая переменная, не совпадающая с концами отрезка I. Поскольку неравенство симметрично, без ограничения общности можно считать, что этими переменными являются x и y, причем $x \le y$. Итак, имеем $0 < x \le y < \frac{1}{2}$. Будем раздвигать эти переменные с сохранением их суммы до тех пор, пока одна из переменных не совпадет с нулем. Другими словами, перейдем от пары переменных (x, y) к паре (x', y') такой, что $x' = 0$, $y' = x + y$. Отметим, что при этом будут выполнены условия $0 < y' \le \frac{1}{2}$, $x + y = x' + y'$ и $y' - x' > y - x$. Докажем, что $\frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-y}{1+y} > \frac{1-x'}{1+x'} \cdot \frac{1-y'}{1+y'}$. Это неравенство равносильно

$$(1-x)(1-y)(1+y') > (1-y')(1+x)(1+y), \qquad (45)$$

или

$$(1-a+b)(1+a) > (1-a)(1+a+b),$$

где $a = x + y = x' + y' > 0$, $b = xy$. После раскрытия скобок в неравенстве (45) и приведения подобных слагаемых получим верное неравенство $2ab > 0$. Следовательно,

$$\frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-y}{1+y} \cdot \frac{1-z}{1+z} > \frac{1-x'}{1+x'} \cdot \frac{1-y'}{1+y'} \cdot \frac{1-z}{1+z},$$

причем $x', y', z \ge 0$, $x' + y' + z = \frac{1}{2}$ и одна из новых переменных совпадает с концом отрезка I. Тогда для двух других переменных выполнено одно из условий:

1) Обе переменные совпадают с концами отрезка I. Тогда неравенство верно.

2) Обе переменные не совпадают с концами отрезка I. Тогда повторяем с этими переменными действия, проведенные выше с переменными x и y, и в итоге приходим к верному неравенству.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Докажите неравенства:

9.4. (Неравенство Гюйгенса) $(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) \geq \left(1+\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}\right)^n$ *при любом натуральном n, где все* x_i *неотрицательны.*

9.5. $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 \geq \frac{1}{n}$, *где* $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$, $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$.

9.6. [24] $\left(1+\frac{1}{x_1}\right)\left(1+\frac{1}{x_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{x_n}\right) \geq (n+1)^n$, *где все* x_i *положительны и* $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$.

9.7. [8] $\frac{(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n)}{(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)} \geq \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$, *где все* x_i *положительны и* $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$ $(n \geq 2)$.

9.8. [24] $\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\ldots+\frac{1}{1+x_n} \geq \frac{n^2}{n+x_1+x_2+\ldots+x_n}$, *где все* x_i *неотрицательны.*

9.9. [8] $\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\ldots+\frac{1}{1+x_n} \leq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}}$, *где все* x_i *принадлежат промежутку* $[0; 1]$.

9.10*. [A] $\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\ldots+\frac{1}{1+x_n} \leq \frac{n(n+1)}{2(1+x_1+x_2+\ldots+x_n)}$, *где все* x_i *принадлежат промежутку* $[0; 1]$.

9.11*. [A] $\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\ldots+\frac{1}{1+x_n} \leq \frac{2n-1}{2}$, *где* $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$, $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$.

9.12*. [8] $xy+yz+zx-2xyz \leq \frac{7}{27}$, *где* $x, y, z \geq 0$, $x+y+z=1$.

9.13*. [A] $(x+y+z)^2\left(x^2+y^2+z^2\right) \geq 8\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)$, *где* $x, y, z \geq 0$.

9.14*. [8] $(x_1+x_2+\ldots+x_n+1)^2 \geq 4\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)$ *для всех натуральных n, где* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0; 1]$.

9.15*. [A] а) $\dfrac{1}{1+x_1^2}+\dfrac{1}{1+x_2^2}+\ldots+\dfrac{1}{1+x_n^2}\geq$
$\geq\dfrac{n^3}{n^2+\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)^2}$, *если* $x_1,x_2,\ldots,x_n\geq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$,

б) $\dfrac{1}{1+x_1^2}+\dfrac{1}{1+x_2^2}+\ldots+\dfrac{1}{1+x_n^2}\leq\dfrac{n^3}{n^2+\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)^2}$, *если все* x_i *принадлежат промежутку* $\left[0;\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

9.16*. [8] $\dfrac{a+b-2c}{b+c}+\dfrac{b+c-2a}{c+a}+\dfrac{c+a-2b}{a+b}\geq 0$ *для любых* $a,\ b,\ c>0$.

УСЛОВНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Условные неравенства – это неравенства, в которых переменные связаны между собой одним или несколькими условиями, записанными в форме равенства или неравенства. В доказательстве условных неравенств могут использоваться рассмотренные ранее методы.

Задача 10.1. [4] *Докажите, что* $ab + bc + ca \le 0$, *если* $a + b + c = 0$.

Решение. Из тождества $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$ заменой выражения $a + b + c$ числом 0 получаем, что
$$ab + bc + ca = -\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \le 0.$$

Задача 10.2. [8] *Докажите, что* $(1+a)(1+b) \ge 4$, *если* a *и* b *положительны и* $ab = 1$.

Решение. Из неравенства Коши для двух переменных получаем, что $1 + a \ge 2\sqrt{a}$ и $1 + b \ge 2\sqrt{b}$. Перемножив почленно два этих неравенства и заменив ab числом 1, получим исходное неравенство.

Задача 10.3. [1] *Докажите, что* $a + b + c \ge 3$, *если* a, b, c *положительны и* $ab + bc + ca \ge a + b + c$.

Решение. Поскольку $(a+b+c)^2 \ge 3(ab + bc + ca)$ (см. задачу 1.25), то $(a+b+c)^2 \ge 3(a+b+c)$.

Так как числа a, b и c положительны, то, поделив обе части последнего неравенства на $a + b + c$, получаем $a + b + c \ge 3$.

Задача 10.4. *Докажите, что* $x^2 + y^2 \ge 2\sqrt{2}\,|x - y|$, *если* $xy = 1$.

Решение. Пусть для определенности $x > y$. Тогда $|x - y| = x - y$. Получаем
$$\frac{x^2 + y^2}{x - y} - 2\sqrt{2} = \frac{(x-y)^2 + 2xy}{x - y} - 2\sqrt{2} = \frac{(x-y)^2 + 2}{x - y} - 2\sqrt{2} =$$
$$= \frac{(x-y)^2 - 2\sqrt{2}\,(x-y) + 2}{x - y} = \frac{\left(x - y - \sqrt{2}\right)^2}{x - y} \ge 0.$$
Случай, когда $x = y$, очевиден.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

10.5. *Докажите, что если произведение двух положительных чисел больше их суммы, то сумма больше 4.*

10.6. [17] *Докажите, что* $(2+x)(2+y)(2+z)\geq 27$, *если* x, y, z *положительны и* $xyz = 1$.

10.7. [24] *Докажите, что* $\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}\geq\frac{3}{2}$, *если* a, b *и* c *положительны и* $a^2+b^2+c^2=3$.

10.8 [24] *Докажите, что* $\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+ca}{1+c}\geq 3$, *если* a, b, c *положительны и* $abc = 1$.

10.9. *Докажите неравенство* $\sqrt{c-x}-\sqrt{c-a}<\sqrt{b-x}-\sqrt{b-a}$, *если* $x<a\leq b<c$.

10.10. *Докажите неравенство* $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}<\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$, *если* $a > b > c > 0$.

10.11*. [12] *Докажите, что* $a + b + c > 3abc$, *если* a, b, c *положительны и* $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>a+b+c$.

10.12*. *Докажите неравенство* $\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}\geq\frac{2}{1+a}+\frac{2}{1+b}+\frac{2}{1+c}$, *если* a, b *и* c *положительны и их сумма равна* 1.

10.13*. [12] *Положительные числа* a, b, c *таковы, что* $a^2+b^2-ab=c^2$. *Докажите, что* $(a-c)(b-c)\leq 0$.

10.14*. [3] *Докажите, что* $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\leq 1$, *если* $x_1\geq x_2\geq\ldots\geq x_n\geq 0$ *и* $\frac{x_1}{\sqrt{1}}+\frac{x_2}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{x_n}{\sqrt{n}}=1$.

10.15*. [1] *Докажите, что* $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geq ab+bc+ca$ *для всех* $a,b,c\geq 0$ *таких, что* $a + b + c = 3$.

10.16*. [1] *Известно, что* $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2=6$ *и* $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=0$. *Докажите, что* $x_1x_2x_3x_4x_5x_6\leq\frac{1}{2}$.

10.17*. [1] *Для положительных чисел* x *и* y *выполнено неравенство* $x^2+y^3\geq x^3+y^4$. *Докажите, что* $x^3+y^3\leq 2$.

10.18*. [8] *Докажите неравенство* $\frac{a_1}{\sqrt{1-a_1}}+\frac{a_2}{\sqrt{1-a_2}}+\ldots+\frac{a_n}{\sqrt{1-a_n}}\geq\sqrt{\frac{n}{n-1}}$, *где* $a_1,a_2,\ldots,a_n>0$, $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$, $n\geq 2$.

10.19*. [1] *Набор чисел* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *удовлетворяет условиям* $a_1 \geq 1$, $a_{k+1} \geq a_k + 1$ *при* $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. *Докажите неравенство* $a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3 \geq (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2$.

10.20*. [11] *Известно, что* $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ *и* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq \frac{1}{2}$. *Докажите, что* $(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n) < 2$.

РЕШЕНИЯ

Глава 1. Методы, используемые в доказательстве неравенств

1.16. Данное неравенство равносильно условию $2\left(x^3+y^3\right)-(x+y)\left(x^2+y^2\right)\geq 0$. Но $2\left(x^3+y^3\right)-(x+y)\left(x^2+y^2\right)=(x-y)^2(x+y)\geq 0$.

1.17. а) После раскрытия скобок, приведения подобных слагаемых и разложения на множители получаем равносильное верное неравенство $a^2b^2(a-b)^2\geq 0$.

б) Аналогичным образом приходим к тому же неравенству.

1.18. Домножив обе части неравенства на положительную величину $\sqrt{ab}$, после переноса всех слагаемых в одну часть неравенства и группировки слагаемых получим равносильное верное неравенство $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\geq 0$.

1.19. Домножив обе части неравенства на 4, после переноса всех слагаемых в одну часть неравенства и группировки слагаемых получим равносильное неравенство $(a-b)\left(a^3-b^3\right)\geq 0$. Разложив второй множитель из левой части неравенства в произведение по формуле разности кубов, получим равносильное неравенство $(a-b)^2\left(a^2+ab+b^2\right)\geq 0$. Последнее неравенство верно в силу того, что $a^2+ab+b^2=\left(a+\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2\geq 0$.

1.20. Домножив обе части неравенства на общий положительный знаменатель, после переноса всех слагаемых в одну часть неравенства и группировки слагаемых получим равносильное неравенство $a^2-2ab+b^2\geq 0$, т.е. $(a-b)^2\geq 0$.

1.21. Как и в предыдущей задаче, приходим к равносильному неравенству $a^2-2ab+b^2\geq 0$, т.е. $(a-b)^2\geq 0$.

1.22. Данное неравенство равносильно верному неравенству

$$(2x+a)^2+(2z+a)^2+5\left(t+\frac{a}{2}\right)^2+3y^2+\frac{3}{4}a^2\geq 0.$$

1.23. Данное неравенство равносильно верному неравенству $\left(x^2-y^2\right)^2+(x-z)^2+(x-1)^2\ge 0$.

1.24. (Неравенство о трех квадратах) Домножим обе части неравенства на 2 и перенесем все слагаемые влево: $\left(a^2+b^2\right)+\left(b^2+c^2\right)+\left(c^2+a^2\right)-2ab-2bc-2ca\ge 0$. Выделив в этом неравенстве полные квадраты, получим верное неравенство $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$.

1.25. Раскрыв скобки в обеих частях неравенства, получим

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx\ge 3xy+3yz+3zx,$$

что равносильно уже доказанному неравенству о трех квадратах (см. задачу 1.24).

1.26. Домножим обе части неравенства на 2, перенесем все слагаемые в одну часть и выделим полные квадраты. Получим равносильное верное неравенство

$$(a-1)^2+(b-1)^2+(a+b-2)^2\ge 0.$$

1.27. Перенесем все слагаемые в одну часть и выделим полные квадраты. Получим равносильное верное неравенство

$$\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+3\left(\frac{b}{2}-1\right)^2\ge 0.$$

1.28. Перенесем все слагаемые в одну часть и выделим полные квадраты. Получим равносильное верное неравенство

$$\left(\frac{a}{2}-b\right)^2+\left(\frac{a}{2}-c\right)^2+\left(\frac{a}{2}-d\right)^2+\left(\frac{a}{2}-e\right)^2\ge 0.$$

1.29. Раскрыв скобки, придем к равносильному неравенству

$$x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+x^2z+xz^2-6xyz\ge 0,$$

т.е. $x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2\ge 0$. Последнее неравенство верно в силу того, что $x,y,z\ge 0$.

1.30. После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получим равносильное неравенство $x^3y+xy^3+y^3z+yz^3+$ $+z^3x+zx^3-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2+x^2yz+xy^2z+xyz^2\ge 0$, т.е. $xy(x-y)^2+yz(y-z)^2+zx(z-x)^2+xyz(x+y+z)\ge 0$. Последнее неравенство верно в силу того, что $x,y,z\ge 0$.

1.31. После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получим равносильное неравенство $x^3y+xy^3+y^3z+yz^3+$ $+z^3x+zx^3-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2+4x^2yz+4xy^2z+4xyz^2\ge 0$, т.е. $xy(x-y)^2+yz(y-z)^2+zx(z-x)^2+4xyz(x+y+z)\ge 0$. Последнее неравенство верно в силу того, что $x,y,z\ge 0$.

1.32. После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получим равносильное неравенство $x^3y + xy^3 + y^3z + yz^3 + z^3x + zx^3 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 + 5x^2yz + 5xy^2z + 5xyz^2 \geq 0$, а оно в свою очередь равносильно верному неравенству $xy(x-y)^2 + yz(y-z)^2 + zx(z-x)^2 + 5xyz(x+y+z) \geq 0$.

1.33. После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получим равносильное неравенство $x^4 + y^4 + z^4 - 4x^3y - 4xy^3 - 4y^3z - 4yz^3 - 4z^3x - 4zx^3 + 4x^2yz + 4xy^2z + 4xyz^2 + 6x^2y^2 + 6y^2z^2 + 6z^2x^2 \geq 0$, а оно в свою очередь равносильно верному неравенству $\left(x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx\right)^2 \geq 0$.

1.34. Перепишем неравенство в виде

$$\left(x^3 + y^3\right)\left(y^3 + z^3\right)\left(z^3 + x^3\right) \geq xy(x+y) \cdot yz(y+z) \cdot zx(z+x)$$

и разобьем его на три неравенства, доказав которые мы докажем исходное неравенство. Так как $x^3 + y^3 \geq xy(x+y)$, $y^3 + z^3 \geq yz(y+z)$, $z^3 + x^3 \geq zx(z+x)$ (см. задачу 1.1), то, перемножая эти неравенства, получаем исходное.

1.35. Перепишем неравенство в виде

$$\left(x^3 + y^3\right) + \left(y^3 + z^3\right) + \left(z^3 + x^3\right) \geq xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x)$$

и разобьем его на три неравенства. Поскольку $x^3 + y^3 \geq xy(x+y)$, $y^3 + z^3 \geq yz(y+z)$, $z^3 + x^3 \geq zx(z+x)$ (см. задачу 1.1), то, складывая эти неравенства, получаем исходное.

1.36. В знаменателях дробей в левой части неравенства стоят суммы квадратов. Это наводит на мысль применить неравенство Коши к этим знаменателям. Перепишем неравенство в виде

$$\frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{b^2+c^2} + \frac{1}{c^2+a^2} \leq \frac{1}{2ab} + \frac{1}{2bc} + \frac{1}{2ca}$$

и разобьем его на три неравенства $\frac{1}{a^2+b^2} \leq \frac{1}{2ab}$, $\frac{1}{b^2+c^2} \leq \frac{1}{2bc}$ и $\frac{1}{c^2+a^2} \leq \frac{1}{2ca}$. Поскольку $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geq 0$, то $a^2 + b^2 \geq 2ab$, следовательно, $\frac{1}{a^2+b^2} \leq \frac{1}{2ab}$. Аналогично получаем оставшиеся два неравенства. Складывая эти три верных неравенства, получаем исходное.

1.37. Поскольку $ab + bc + cd + da = (a+c)(b+d)$, то неравенство можно записать в виде

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) + \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{d}\right) \geq \frac{4}{a+c} + \frac{4}{b+d}.$$

Это неравенство получается сложением двух верных неравенств $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\geq\frac{4}{a+c}$ и $\frac{1}{b}+\frac{1}{d}\geq\frac{4}{b+d}$ (см. задачу 1.20).

1.38. После переноса слагаемых в левую часть неравенства получим равносильное неравенство $x-xy+y-xy\geq 0$, т.е. $x(1-y)+y(1-x)\geq 0$. Последнее неравенство верно, поскольку числа x, $1-x$, y и $1-y$ неотрицательны.

1.39. Домножив обе части неравенства на общий знаменатель, после переноса слагаемых в одну часть неравенства и приведения подобных слагаемых получим равносильное неравенство $1-x^2-y^2+xy\geq 0$, которое уже доказано ранее (см. решение задачи 1.15).

1.40. Оценим снизу слагаемые левой части. Поскольку каждое из них больше следующего, то все они больше последнего (кроме самого последнего). Тогда

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}}_{n\text{ слагаемых}}=n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}\,.$$

1.41. Оценим снизу каждое слагаемое левой части. Поскольку

$$\frac{x_i}{x_0+x_i}>\frac{x_i}{x_0+x_1+x_2+\ldots+x_n}$$

для каждого $x\in\{1,2,\ldots,n\}$, то, складывая эти n неравенств, получаем исходное.

1.42. Очевидно, что при $n=1$ неравенство верно. Пусть теперь $n\geq 2$. Оценим сверху каждое слагаемое левой части. Заметим. что $\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$ для каждого натурального $k\geq 2$. Тогда

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<$$

$$<1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}=$$

$$=1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=$$

$$=1+1-\frac{1}{n}=2-\frac{1}{n}<2\,.$$

1.43. Обозначим через A произведение, стоящее в левой части неравенства, и положим $B=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1}$. Возведем обе части неравенства в квадрат, получим равносильное неравенство $A^2 < \frac{1}{2n+1}$. Заметим, что поскольку $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}, \frac{3}{4} < \frac{4}{5}, \ldots, \frac{2n-1}{2n} < \frac{2n}{2n+1}$, то $A < B$, поэтому

$$A^2 < AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{2n+1},$$

откуда получаем неравенство, равносильное первоначальному.

1.44. Возведем обе части неравенства в двенадцатую степень, получим равносильное исходному неравенство $n^4 > (n+1)^3$. Данное неравенство верно, поскольку $n^4 - (n+1)^3 = n^4 - n^3 - 3n^2 - 3n - 1 = (n-3)\left(n^3 + 2n^2 + 3n + 6\right) + 17 > 0$ при $n \geq 3$.

1.45. Воспользуемся методом подстановки. В уже доказанное неравенство из задачи 1.25 подставим ab, bc и ca вместо x, y и z соответственно. Получим нужное неравенство.

1.46. Домножим левую и правую части неравенства на $abc(ab+bc+ca)$. Получим равносильное неравенство $(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c)$ (см. задачу 1.45).

1.47. Дважды применим неравенство о трех квадратах (см. задачу 1.24):

$$a^4 + b^4 + c^4 = \left(a^2\right)^2 + \left(b^2\right)^2 + \left(c^2\right)^2 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 =$$

$$= (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 \geq (ab)(bc) + (bc)(ca) + (ca)(ab) =$$

$$= abc(a+b+c).$$

1.48. Обозначим $a = \sqrt{x+y}$, $b = \sqrt{y+z}$, $x = \sqrt{z+x}$. Тогда $a^2 + b^2 + c^2 = 2(x+y+z)$ и исходное неравенство примет вид $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, что уже доказано (см. задачу 1.24).

1.49. Воспользуемся методом подстановки. В уже доказанное неравенство из задачи 1.7 подставим $\frac{x^3}{yz}$ вместо a, $\frac{y^3}{zx}$ вместо b, $\frac{z^3}{xy}$ вместо c, где $x,\ y,\ z > 0$. Получим требуемое неравенство.

1.50. Воспользуемся методом подстановки. В уже доказанное неравенство из задачи 1.7 подставим $\frac{x^2}{y^2}$ вместо a, $\frac{y^2}{z^2}$ вместо b, $\frac{z^2}{x^2}$ вместо c, где $x,\ y,\ z > 0$. Получим требуемое неравенство.

1.51. Рассмотрим два случая.

а) Пусть $x \geq y$. Тогда $x = y + z$, где $z = x - y \geq 0$. Поэтому $2x^3 + 3y^3 - 4xy^2 = 2(y+z)^3 + 3y^3 - 4(y+z)y^2 = y^3 + 2y^2z + 6yz^2 + 2z^3 \geq 0$, откуда следует исходное неравенство.

б) Пусть $y > x$. Тогда $y = x + u$, где $u = y - x > 0$. Поэтому $2x^3 + 3y^3 - 4xy^2 = 2x^3 + 3(x+u)^3 - 4x(x+u)^2 = x^3 + x^2u + 5xu^2 + 3u^3 > 0$, откуда следует исходное неравенство.

1.52. По условию имеем $x = y + z$, где $z = x - y \geq 0$. Тогда $\sqrt{2xy - y^2} = \sqrt{y^2 + 2yz} \geq \sqrt{y^2} = y$, $\sqrt{x^2 - y^2} = \sqrt{z^2 + 2yz} \geq \sqrt{z^2} = z$. Складывая эти неравенства, получим $\sqrt{2xy - y^2} + \sqrt{x^2 - y^2} \geq y + z = x$.

1.53. Перейдем в этом неравенстве к новым переменным α и β, определенным формулами $x = \sin\alpha$, $y = \sin\beta$. Тогда исходное неравенство примет вид $\left|\sin\alpha\sin\beta - |\cos\alpha\cos\beta|\right| \leq 1$, т.е. $|\cos(\alpha+\beta)| \leq 1$ (если $\cos\alpha\cos\beta \geq 0$) или $|\cos(\alpha-\beta)| \leq 1$ (в противном случае).

1.54*. Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые, получим

$$\left(x^a y^d + x^d y^a\right) + \left(y^a z^d + y^d z^a\right) + \left(z^a x^d + z^d x^a\right) \geq$$
$$\geq \left(x^b y^c + x^c y^b\right) + \left(y^b z^c + y^c z^b\right) + \left(z^b x^c + z^c x^b\right). \quad (46)$$

Используем метод разбиения. Достаточно доказать неравенство $x^a y^d + x^d y^a \geq x^b y^c + x^c y^b$, из которого будут следовать $y^a z^d + y^d z^a \geq y^b z^c + y^c z^b$ и $z^a x^d + z^d x^a \geq z^b x^c + z^c x^b$. Сложив последние три неравенства, получим неравенство (46). Неравенство $x^a y^d + x^d y^a \geq x^b y^c + x^c y^b$ равносильно

$$x^a y^a \left(y^{c-a}\left(y^{d-c} - x^{b-a}\right) - x^{c-a}\left(y^{b-a} - x^{d-c}\right)\right) \geq 0.$$

Положим $u = b - a = d - c$, $v = c - a$. Тогда последнее неравенство можно записать как $x^a y^a \left(y^v \left(y^u - x^u\right) - x^v\left(y^u - x^u\right)\right) \geq 0$, или $x^a y^a \left(y^v - x^v\right)\left(y^u - x^u\right) \geq 0$. Последнее неравенство верно, так как числа $y^v - x^v$ и $y^u - x^u$ одного знака (того же, что и число $y - x$), поскольку $u, v > 0$.

1.55*. Поскольку $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, то

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 - (x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5)^2 =$$
$$= (2x_1 + 2x_3 + 2x_5)(2x_2 + 2x_4) = 4p + 4x_1x_4 + 4x_5(x_2 - x_1),$$

где $p = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1$. Отсюда следует, что
$$\left(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5\right)^2 \geq 4p + 4x_5\left(x_2 - x_1\right). \qquad (47)$$
Также имеем
$$\left(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5\right)^2 - \left(-x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5\right)^2 =$$
$$= \left(2x_2 + 2x_3 + 2x_5\right)\left(2x_1 + 2x_4\right) = 4p + 4x_2x_4 + 4x_3\left(x_1 - x_2\right),$$
откуда получаем, что
$$\left(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5\right)^2 \geq 4p + 4x_3\left(x_1 - x_2\right). \qquad (48)$$
Нужное неравенство следует из (47), если $x_2 \geq x_1$, или из (48), если $x_1 \geq x_2$.

Глава 2. Неравенство о средних и его применение

2.6. Следует из неравенства Коши для трех переменных $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$ и $\frac{c}{a}$.

2.7. В левой части неравенства присутствует сумма четвертых степеней, что наводит на мысль представить левую часть в виде суммы четырех слагаемых и применить неравенство Коши. Получаем $x^4 + y^4 + 8 = x^4 + y^4 + 4 + 4 \geq 4\sqrt[4]{x^4y^4 \cdot 4 \cdot 4} = 8xy$.

2.8. Следует из неравенства (9) для переменных a, b, c, d.

2.9. Следует из неравенства (9) для трех переменных x, y, z, где $x = b + c$, $y = c + a$, $z = a + b$.

2.10. Подставив в известное следствие из неравенства о средних арифметическом и гармоническом
$$x + y + z \geq \frac{9}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}$$
вместо x, y и z выражения $\frac{ab}{a+b}$, $\frac{bc}{b+c}$ и $\frac{ca}{c+a}$ соответственно, получим
$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \geq \frac{9}{\frac{a+b}{ab} + \frac{b+c}{bc} + \frac{c+a}{ca}} =$$
$$= \frac{9}{\frac{(a+b)c + (b+c)a + (c+a)b}{abc}} = \frac{9abc}{2(ab + bc + ca)}.$$

2.11. Воспользовавшись неравенством о средних квадратическом и арифметическом, получим

$$\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}+\sqrt{4z+1}}{3} \le \sqrt{\frac{4x+1+4y+1+4z+1}{3}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4(x+y+z)+3}{3}} = \sqrt{\frac{7}{3}},$$

откуда следует исходное неравенство.

2.12. После раскрытия скобок приходим к равносильному неравенству

$$a^3+b^3+c^3 \ge a^2b+b^2c+c^2a,$$

которое получается сложением следующих трех неравенств Коши для трех переменных:

$$\frac{a^3+a^3+b^3}{3} \ge a^2b, \quad \frac{b^3+b^3+c^3}{3} \ge b^2c, \quad \frac{c^3+c^3+a^3}{3} \ge c^2a.$$

2.13. Обозначим $a = x + y$, $b = y + z$, $c = z + x$. Тогда $a+b+c=2(x+y+z)$ и исходное неравенство примет вид $(a+b+c)^3 \ge 27abc$, что равносильно неравенству Коши $\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$.

2.14. Поскольку $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \ge \frac{9}{2(a+b+c)}$ (см. задачу 2.9), то достаточно доказать неравенство $\frac{9}{2(a+b+c)} \ge$ $\ge \frac{3(a+b+c)}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}$. Домножив обе части неравенства на общий знаменатель и поделив на 3, получим неравенство $3\left(a^2+b^2+c^2\right) \ge (a+b+c)^2$, которое следует из неравенства о средних квадратическом и арифметическом.

2.15. Из неравенства о средних квадратическом и арифметическом следует, что $3\left(x^2+y^2+z^2\right) \ge (x+y+z)^2$ (можно доказать это неравенство, раскрыв скобки и приведя к неравенству о трех квадратах, см. задачу 1.24). Тогда

$$8(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2\right) \ge \frac{8(x+y+z)^3}{3} \ge 9(x+y)(y+z)(z+x)$$

(последнее неравенство получили, используя задачу 2.13).

2.16. Воспользуемся неравенствами о средних степенных:

$$\frac{x+y+z}{3} \le \sqrt[3]{\frac{x^3+y^3+z^3}{3}} \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \le \sqrt[3]{\frac{x^3+y^3+z^3}{3}}.$$

Возведя второе неравенство в квадрат и умножив почленно на первое, получим неравенство, равносильное исходному.

2.17. Из неравенства Коши имеем

$$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} \ \text{ и } \ xy + yz + zx \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\ .$$

Перемножая эти неравенства, получаем требуемое неравенство.

2.18. Воспользуемся неравенством о средних

$$\sqrt[3]{\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3}} \geq \frac{x + y + z}{3}\ .$$

После возведения в шестую степень и умножения на 27 получим

$$3\left(x^3 + y^3 + z^3\right)^2 \geq \frac{(x + y + z)^6}{27}\ .$$

Но из задачи 1.25 следует, что

$$\frac{(x + y + z)^6}{27} = \left(\frac{(x + y + z)^2}{3}\right)^3 \geq (xy + yz + zx)^3\ ,$$

откуда получаем исходное неравенство.

2.19. Из неравенства о средних квадратическом и арифметическом следует

$$\sqrt{\frac{(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2}{3}} \geq \frac{ab + bc + ca}{3}\ .$$

Возведем обе части неравенства в квадрат и умножим на 3, придем к неравенству $(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 \geq \frac{1}{3}(ab + bc + ca)^2$. Умножив его на известное неравенство $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$ (см. задачу 1.25), получим

$$(a + b + c)^2\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right) \geq (ab + bc + ca)^3\ . \qquad (49)$$

Теперь нам достаточно доказать неравенство $(ab + bc + ca)^3 \geq 3abc(a + b + c)(ab + bc + ca)$, т.е. $(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c)$. Последнее неравенство верно (см. задачу 1.46).

2.20. Используя неравенство между средними геометрическим и гармоническим, получаем, что $\sqrt{\frac{x}{y + z}\cdot 1} \geq \frac{2}{1 + \frac{y + z}{x}} = \frac{2x}{x + y + z}$, $\sqrt{\frac{y}{z + x}\cdot 1} \geq \frac{2}{1 + \frac{z + x}{y}} = \frac{2y}{z + y + z}$, $\sqrt{\frac{z}{x + y}\cdot 1} \geq$

$\geq \dfrac{2}{1+\dfrac{x+y}{z}} = \dfrac{2z}{x+y+z}$. Складывая эти неравенства, получим требуемое.

2.21. Заметим, что поскольку $ab \leq \dfrac{(a+b)^2}{4}$, $cd \leq \dfrac{(c+d)^2}{4}$ и $(a+b)(c+d) \leq \dfrac{(a+b+c+d)^2}{4}$, то

$$abc + abd + acd + bcd = ab(c+d) + cd(a+b) \leq$$

$$\leq \frac{(a+b)^2}{4}(c+d) + \frac{(c+d)^2}{4}(a+b) =$$

$$= \frac{(a+b)(c+d)(a+b+c+d)}{4} \leq \frac{(a+b+c+d)^3}{16}.$$

Тогда

$$\sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}} \leq \frac{a+b+c+d}{4}.$$

Для завершения доказательства осталось заметить, что $\dfrac{a+b+c+d}{4} \leq \sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}$ (неравенство между средними арифметическим и квадратическим для четырех переменных).

2.22. Извлечем корень из обеих частей неравенства, получим $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^4 \geq 8(x+y)\sqrt{xy}$, т.е. $x^2 + 4x\sqrt{xy} + 6xy + 4y\sqrt{xy} + {}$ $+ y^2 \geq 8x\sqrt{xy} + 8y\sqrt{xy}$, что равносильно верному неравенству $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^4 \geq 0$.

2.23. По неравенству Коши для двух переменных имеем

$$1 + x^{n+1} \geq 2x^{\frac{n+1}{2}},\ 1 + x \geq 2x^{\frac{1}{2}}.$$

Поэтому $\left(1+x^{n+1}\right)(1+x)^{n-1} \geq 2x^{\frac{n+1}{2}}\left(2x^{\frac{1}{2}}\right)^{n-1} = 2^n x^n$. Разделив на $(1+x)^{n-1}$, получим нужное неравенство.

2.24. Применим неравенство Коши к числам 1, 2, ..., $2n-1$. Получим, что

$$\frac{1+2+\ldots+2n-1}{2n-1} > \sqrt[2n-1]{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (2n-1)} = \sqrt[2n-1]{(2n-1)!}.$$

Возведя обе части неравенства в степень $2n-1$ и использовав известное тождество

$$1+2+\ldots+(2n-1)=n(2n-1),$$

получим исходное неравенство.

2.25. Применим неравенство Коши к числам $1^3, 2^3, \ldots, n^3$. Получим, что

$$\frac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n}>\sqrt[n]{1^3\cdot 2^3\cdot\ldots\cdot n^3}=\sqrt[n]{(n!)^3}.$$

Возведя обе части неравенства в степень $\frac{n}{3}$ и использовав известное тождество

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

получим исходное неравенство.

Замечание. Читатель при желании сможет легко доказать это тождество методом математической индукции.

2.26*. Возведя в квадрат, запишем неравенство в виде

$$\frac{x_1x_2\ldots x_n}{(1+x_1)^2(1+x_1+x_2)^2\ldots(1+x_1+x_2+\ldots+x_n)^2}\le\frac{1}{(n+1)^{n+1}}.$$

Обозначим

$$s=\frac{x_1x_2\ldots x_n}{(1+x_1)^2(1+x_1+x_2)^2\ldots(1+x_1+x_2+\ldots+x_n)^2},$$

$$y_1=\frac{x_1}{1+x_1},\quad y_2=\frac{x_2}{(1+x_1)(1+x_1+x_2)},$$

$$y_3=\frac{x_3}{(1+x_1+x_2)(1+x_1+x_2+x_3)},\ldots,$$

$$y_n=\frac{x_n}{(1+x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})(1+x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n)},$$

$$y_{n+1}=\frac{1}{1+x_1+x_2+\ldots+x_n}.$$

Тогда $y_1y_2\ldots y_{n+1}=s$,

$$y_1+\ldots+y_{n+1}=y_1+\ldots+y_{n-1}+\left(y_n+\frac{1}{1+x_1+x_2+\ldots+x_n}\right)=$$

$$=y_1+\ldots+y_{n-2}+\left(y_{n-1}+\frac{1}{1+x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}\right)=\ldots$$

$$=\ldots=\frac{x_1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_1}=1.$$

Отсюда по неравенству Коши получаем

$$s = y_1 y_2 \dots y_{n+1} \le \left(\frac{y_1 + \dots + y_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}.$$

Глава 3. Неравенство Коши–Буняковского–Шварца и его применение

3.4. В неравенстве (10) положим $n = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = a$, $b_1 = 1$, $b_2 = b$. Тогда, учитывая, что любое число не превосходит своего модуля, получим исходное неравенство.

3.5. В неравенстве (10) положим $n = 2$, $a_1 = \sqrt{a}$, $a_2 = \sqrt{c}$, $b_1 = \sqrt{b}$, $b_2 = \sqrt{d}$. Получим исходное неравенство.

3.6. В неравенстве (11) положим $n = 2$, $a_1 = a$, $a_2 = b$, $b_1 = a^2$, $b_2 = b^2$. Получим исходное неравенство.

3.7. Заметим, что для чисел 3, 4 и 5, присутствующих в этом неравенстве, имеет место равенство $3^2 + 4^2 = 5^2$. Этот факт может навести на мысль о применении неравенства Коши – Буняковского–Шварца. В неравенстве (10) положим $n = 2$, $a_1 = 3$, $a_2 = -4$, $b_1 = \sin x$, $b_2 = \cos x$. Учитывая, что $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, получим исходное неравенство.

3.8. Применим неравенство (10) к значениям $n = 2$, $a_1 = \sin x \sin y$, $a_2 = \cos x \cos y$, $b_1 = \sin z$, $b_2 = \cos z$. Учитывая, что любое число не превосходит своего модуля, получим

$$\sin x \sin y \sin z + \cos x \cos y \cos z \le$$

$$\le \sqrt{(\sin x \sin y)^2 + (\cos x \cos y)^2} \cdot \sqrt{\sin^2 z + \cos^2 z} =$$

$$= \sqrt{(\sin x \sin y)^2 + (\cos x \cos y)^2} \le$$

$$\le \sqrt{(\sin x \sin y)^2 + 2|\sin x \sin y \cos x \cos y| + (\cos x \cos y)^2} =$$

$$= |\sin x \sin y| + |\cos x \cos y| \le$$

$$\le \max\left\{|\sin x \sin y + \cos x \cos y|, |\sin x \sin y - \cos x \cos y|\right\} =$$

$$= \max\left\{|\cos(x-y)|, |\cos(x+y)|\right\} \le 1.$$

3.9. Если $x = 0$, то неравенство верно. Если $x \ne 0$, то в неравенстве (11) положим $n = 2$, $a_1 = 2\sqrt{1-x^2}$, $a_2 = 2x - \frac{1}{x}$,

$b_1 = b_2 = x$. Получим

$$\left(2x\sqrt{1-x^2}+2x^2-1\right)^2=\left(\left(2\sqrt{1-x^2}\right)x+\left(2x-\frac{1}{x}\right)x\right)^2\leq$$

$$\leq\left(4-4x^2+4x^2-4+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^2+x^2\right)=2\,.$$

3.10. а) В неравенстве (10) положим $n = 2$, $a_1 = a$, $a_2 = \sqrt{1-a^2}$, $b_1 = \sqrt{1-b^2}$, $b_2 = b$. Получим исходное неравенство. Аналогично и для б).

3.11. Полагая в неравенстве (11) $x_i = \sqrt{a_i b_i}$, $y_i = \sqrt{\dfrac{a_i}{b_i}}$ для каждого $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, получим исходное неравенство.

3.12. Полагая в неравенстве (11) $x_i = \sqrt{a_i c_i}$, $y_i = \sqrt{\dfrac{b_i}{c_i}}$ для каждого $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, получим исходное неравенство.

3.13. Применим неравенство (10) к наборам переменных $(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n)$ и $(x_2,x_3,\ldots,x_n,x_1)$, получим требуемое неравенство.

3.14. (Неравенство треугольника) Возведя обе части данного неравенства в квадрат, после приведения подобных слагаемых получим равносильное неравенство $-2(a_1b_1+\ldots+a_nb_n)\leq$ $\leq 2\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+\ldots+b_n^2}$, которое является прямым следствием неравенства (10).

3.15. Применив неравенство Коши–Буняковского–Шварца (10) к наборам (a,b) и (c,d), получим

$$\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}\geq|ac+bd|\,.$$

Аналогично имеем

$$\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{d^2+c^2}\geq|ad+bc|\,,$$

$$\sqrt{a^2+d^2}\cdot\sqrt{c^2+b^2}\geq|ac+db|\,,$$

$$\sqrt{a^2+d^2}\cdot\sqrt{b^2+c^2}\geq|ab+dc|\,.$$

Перемножив эти четыре неравенства и воспользовавшись тем, что $|t|\geq t$ для всех t, придем к нужному неравенству.

3.16. Докажем равносильное неравенство

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)\geq(x+y+z)^2\,.$$

Из неравенства о трех квадратах (см. задачу 1.24) получаем,

что
$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right) \geq \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)(xy+yz+zx).$$
Теперь достаточно доказать неравенство
$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)(xy+yz+zx) \geq (x+y+z)^2,$$
которое легко получить из неравенства задачи 3.12, положив $n = 3$, $a_1 = b_1 = x$, $a_2 = b_2 = y$, $a_3 = b_3 = z$, $c_1 = y$, $c_2 = z$, $c_3 = x$.

3.17. Воспользуемся леммой Титу (12). Получим
$$\frac{x}{2y+x}+\frac{y}{2z+x}+\frac{z}{2x+y} =$$
$$= \frac{x^2}{x(2y+z)}+\frac{y^2}{y(2z+x)}+\frac{z^2}{z(2x+y)} \geq \frac{(x+y+z)^2}{3(xy+yz+zx)}.$$
Для завершения доказательства исходного неравенства осталось показать, что
$$\frac{(x+y+z)^2}{3(xy+yz+zx)} \geq 1.$$
Последнее же неравенство равносильно неравенству $(x+y+ +z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$, которое уже доказано (см. задачу 1.25).

3.18. Обозначим через A левую часть неравенства и применим к нему лемму Титу (12). Получим
$$A \geq \frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)} = \frac{3}{2}\cdot\frac{x+y+z}{3} \geq \frac{3}{2}\sqrt[3]{xyz} = \frac{3}{2}$$
(здесь было использовано неравенство Коши (41) для трех переменных).

3.19. Обозначим через A левую часть неравенства и умножим числитель и знаменатель первой дроби на a, числитель и знаменатель второй – на b, третьей – на c и четвертой – на d. После этого применим лемму Титу (12). Получим
$$A = \frac{a^2}{ab+2ac+ad}+\frac{b^2}{bc+2bd+ab}+\frac{c^2}{cd+2ac+bc}+\frac{d^2}{ad+2bd+cd} \geq$$
$$\geq \frac{(a+b+c+d)^2}{2ab+2ad+2bc+2cd+4ac+4bd}.$$

Теперь достаточно доказать, что

$$\frac{(a+b+c+d)^2}{2ab+2ad+2bc+2cd+4ac+4bd} \geq 1\,,$$

а это равносильно неравенству $(a+b+c+d)^2 \geq 2ab+2ad+2bc+$ $+\,2cd+4ac+4bd$. После переноса в последнем неравенстве всех слагаемых в левую часть и группировки слагаемых получим равносильное верное неравенство $(a-c)^2+(b-d)^2 \geq 0$, которое завершает доказательство.

3.20. Обозначим через A левую часть неравенства и применим к нему лемму Титу (12). Получим

$$A \geq \frac{(a+b+c+d)^2}{2ab+2bc+2cd+2da}\,.$$

Теперь достаточно доказать, что

$$\frac{(a+b+c+d)^2}{2ab+2bc+2cd+2da} \geq 2\,,$$

т.е. что $(a+b+c+d)^2 \geq 4ab+4bc+4cd+4da$. Раскрыв скобки в левой части неравенства, после переноса всех слагаемых влево получим равносильное неравенство $a^2+b^2+c^2+d^2-2ab+2ac-$ $-\,2ad-2bc+2bd-2cd \geq 0$. Левая часть этого неравенства сворачивается в полный квадрат: $(a-b+c-d)^2 \geq 0$, получили верное неравенство.

3.21. Воспользуемся леммой Титу (12). Получим

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}=$$

$$=\frac{a^4}{a\left(a^2+ab+b^2\right)}+\frac{b^4}{b\left(b^2+bc+c^2\right)}+\frac{c^4}{c\left(c^2+ca+a^2\right)} \geq$$

$$\geq \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^3+a^2b+ab^2+b^3+b^2c+bc^2+c^3+c^2a+ca^2}=$$

$$=\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)}=\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\,.$$

Теперь достаточно доказать, что $a^2+b^2+c^2 \geq \dfrac{(a+b+c)^2}{3}$. Последнее неравенство можно получить из неравенства (11), положив $n = 3$, $a_1=a$, $a_2=b$, $a_3=c$, $b_1=b_2=b_3=1$.

3.22. (Неравенство Шапиро для четырех переменных) Воспользуемся леммой Титу (12). Получим

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}=\frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(c+d)}+\frac{c^3}{c(d+a)}+$$

$$+\frac{d^2}{d(a+b)}\geq\frac{(a+b+c+d)^2}{ab+2ac+ad+bc+2bd+cd}.$$

Теперь достаточно доказать, что $(a+b+c+d)^2\geq 2(ab+2ac+$ $+ad+bc+2bd+cd)$. Но поскольку из неравенства Коши следует, что $a^2+c^2\geq 2ac$ и $b^2+d^2\geq 2bd$, то

$$(a+b+c+d)^2=\left(a^2+c^2\right)+\left(b^2+d^2\right)+2ab+2ac+2ad+2bc+$$

$$+2bd+2cd\geq 2ac+2bd+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd=$$

$$=2(ab+2ac+ad+bc+2bd+cd).$$

3.23. (Неравенство Шапиро для пяти переменных) Обозначим левую часть неравенства через A и воспользуемся леммой Титу (12). Получим

$$A=\frac{x_1^2}{x_1(x_2+x_3)}+\frac{x_2^2}{x_2(x_3+x_4)}+$$

$$+\frac{x_3^2}{x_3(x_4+x_5)}+\frac{x_4^2}{x_4(x_5+x_1)}+\frac{x_5^2}{x_5(x_1+x_2)}\geq$$

$$\geq\frac{(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^2}{x_1(x_2+x_3)+x_2(x_3+x_4)+x_3(x_4+x_5)+x_4(x_5+x_1)+x_5(x_1+x_2)}.$$

Теперь достаточно доказать неравенство

$$2(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^2\geq$$

$$\geq 5\big(x_1(x_2+x_3)+x_2(x_3+x_4)+x_3(x_4+x_5)+$$

$$+x_4(x_5+x_1)+x_5(x_1+x_2)\big).$$

Раскрыв скобки, после приведения подобных слагаемых получим

$$2\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2\right)\geq$$

$$\geq x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_1x_5+x_2x_3+x_2x_4+x_2x_5+$$

$$+x_3x_4+x_3x_5+x_4x_5.$$

Умножим обе части неравенства на 2, после группировки придем к равносильному верному неравенству

$$(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+(x_1-x_4)^2+(x_1-x_5)^2+(x_2-x_3)^2+$$

$$+(x_2-x_4)^2+(x_2-x_5)^2+(x_3-x_4)^2+(x_3-x_5)^2+(x_4-x_5)^2\geq 0\ .$$

3.24. (Неравенство Шапиро для шести переменных) Обозначим левую часть неравенства через A и воспользуемся леммой Титу (12). Получим

$$A=\frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(c+d)}+\frac{c^2}{c(d+e)}+\frac{d^2}{d(e+f)}+\frac{e^2}{e(f+a)}+\frac{f^2}{f(a+b)}\geq$$

$$\geq\frac{(a+b+c+d+e+f)^2}{a(b+c)+b(c+d)+c(d+e)+d(e+f)+e(f+a)+f(a+b)}\ .$$

Пусть $S = ab + ac + ad + ae + af + bc + bd + be + bf + cd + ce + cf + de + df + ef$. Знаменатель последней дроби можно записать как $S - ad - be - cf$. Нам достаточно будет доказать неравенство

$$\frac{(a+b+c+d+e+f)^2}{S-ad-be-cf}\geq 3\ ,$$

т.е.

$$(a+b+c+d+e+f)^2\geq 3(S-ad-be-cf)\ .$$

Заметим, что

$$2S=(a+b+c+d+e+f)^2-\left(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2\right),$$

поэтому последнее неравенство после умножения на 2 можно записать как

$$2(a+b+c+d+e+f)^2\geq 3(a+b+c+d+e+f)^2-$$

$$-3\left(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2\right)-6ad-6be-6cf\ ,$$

т.е.

$$3\left(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+2ad+2be+2cf\right)\geq$$

$$\geq(a+b+c+d+e+f)^2\ .$$

Введем обозначения $x = a + d$, $y = b + e$, $z = c + f$. Тогда в новых переменных последнее неравенство запишется как $3\left(x^2+y^2+z^2\right)\geq(x+y+z)^2$. Оно верно для всех x, y, z, поскольку равносильно неравенству о трех квадратах (см. задачу 1.24).

3.25. Положим $a = x_1 + x_2$, $b = x_2 + x_3$, $c = x_3 + x_4$, $d = x_4 + x_1$ и заметим, что $a + c = b + d = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$. Воспользовавшись леммой Титу (12), имеем

$$\frac{x_1 + x_3}{x_1 + x_2} + \frac{x_2 + x_4}{x_2 + x_3} + \frac{x_3 + x_1}{x_3 + x_4} + \frac{x_4 + x_2}{x_4 + x_1} =$$

$$= \frac{(x_1 + x_3)^2}{a(x_1 + x_3)} + \frac{(x_2 + x_4)^2}{b(x_2 + x_4)} + \frac{(x_3 + x_1)^2}{c(x_3 + x_1)} + \frac{(x_4 + x_2)^2}{d(x_4 + x_2)} \geq$$

$$\geq \frac{\left((x_1 + x_3) + (x_2 + x_4) + (x_3 + x_1) + (x_4 + x_2)\right)^2}{a(x_1 + x_3) + b(x_2 + x_4) + c(x_3 + x_1) + d(x_4 + x_2)} =$$

$$= \frac{4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2}{(x_1 + x_3)(a + c) + (x_2 + x_4)(b + d)} = \frac{4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2}{(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2} = 4 .$$

3.26. Воспользуемся леммой Титу (12). Получим

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} = \frac{a^2b^2}{ab(a+b)} + \frac{b^2c^2}{bc(b+c)} + \frac{c^2a^2}{ca(c+a)} \geq$$

$$\geq \frac{(ab + bc + ca)^2}{ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)} .$$

Осталось доказать неравенство

$$\frac{(ab + bc + ca)^2}{ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)} \geq \frac{(ab + bc + ca)(a + b + c)}{2\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}$$

или равносильное ему

$$2\left(a^2 + b^2 + c^2\right)(ab + bc + ca) \geq$$

$$\geq (a + b + c)\left(ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)\right) .$$

Раскрыв скобки в последнем неравенстве, после переноса всех слагаемых в левую часть получим $a^3b + a^3c + b^3a + b^3c + c^3a + c^3b - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 \geq 0$, т.е. $ab(a-b)^2 + bc(b-c)^2 + ca(c-a)^2 \geq 0$, что, очевидно, верно.

3.27*. Поскольку $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$ (см. задачу 1.25), то из условия следует, что $xy + yz + zx \leq 3$. Применим лемму Титу (12):

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{yz} + \frac{z^2}{zx} \geq \frac{(x + y + z)^2}{xy + yz + zx} = \frac{9}{xy + yz + zx} .$$

Теперь достаточно доказать, что $\dfrac{9}{xy+yz+zx} \geq \sqrt{\dfrac{x^2+y^2+z^2}{3}}+2$.

Сделаем замену $t = xy + yz + zx$ ($t \leq 3$), использовав тождество $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=9-2(xy+yz+$ $+zx)$:

$$\frac{9}{t} \geq \sqrt{\frac{9-2t}{3}}+2.$$

Оценим снизу выражение $\sqrt{\dfrac{9-2t}{3}}$, применив неравенство Коши к числам 1 и $\dfrac{9-2t}{3}$:

$$\sqrt{\frac{9-2t}{3}}=\sqrt{1\cdot\frac{9-2t}{3}} \leq \frac{1+\dfrac{9-2t}{3}}{2}=\frac{6-t}{3}.$$

Теперь достаточно доказать неравенство $\dfrac{9}{t} \geq \dfrac{6-t}{3}+2$, равносильное $\dfrac{6}{t}+\left(\dfrac{3}{t}+\dfrac{t}{3}\right) \geq 4$. Последнее неравенство верно, поскольку $t \leq 3$ и $\dfrac{3}{t}+\dfrac{t}{3} \geq 2$ (см. задачу 1.10).

3.28*. Введем новые переменные, определенные формулами $x=\sqrt{a-1}$, $y=\sqrt{b-1}$, $z=\sqrt{c-1}$, получим неравенство $x+y+z \leq \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)\left(1+z^2\right)}$, которое мы докажем для всех $x,y,z \geq 0$. Заметим, что $a+b \leq \sqrt{\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)}$ для всех $a,b \geq 0$. Это неравенство следует из неравенства Коши–Буняковского–Шварца (10) для наборов $(a,1)$ и $(1,b)$. Поэтому

$$x+y+z \leq \sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+(y+z)^2}.$$

Теперь достаточно доказать неравенство

$$\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+(y+z)^2} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)\left(1+z^2\right)},$$

т.е. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{1+(y+z)^2} \leq 2\sqrt{\left(1+y^2\right)\left(1+z^2\right)}$ для всех $y,z \geq 0$.

После возведения в квадрат обеих частей и приведения подобных слагаемых, получим равносильное неравенство $4y^2z^2+1+y^2+z^2-6yz \geq 0$, т.е. $(y-z)^2+(2yz-1)^2 \geq 0$, которое, очевидно, верно.

3.29*. Применим неравенство Коши–Буняковского–Шварца (10) к наборам $\left(\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}\right)$ и $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2a+b}},\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2b+c}},\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2c+a}}\right)$, получим

$$\frac{a}{\sqrt{2a+b}}+\frac{b}{\sqrt{2b+c}}+\frac{c}{\sqrt{2c+a}}\le$$

$$\le\sqrt{(a+b+c)\left(\frac{a}{2a+b}+\frac{b}{2b+c}+\frac{c}{2c+a}\right)}.$$

Осталось доказать, что $\frac{a}{2a+b}+\frac{b}{2b+c}+\frac{c}{2c+a}\le 1$. Но

$$\frac{a}{2a+b}+\frac{b}{2b+c}+\frac{c}{2c+a}=\frac{1}{2}\left(\frac{2a+b-b}{2a+b}+\frac{2b+c-c}{2b+c}+\frac{2c+a-a}{2c+a}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{b}{2a+b}\right)+\left(1-\frac{c}{2b+c}\right)+\left(1-\frac{a}{2c+a}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(3-\left(\frac{b}{2a+b}+\frac{c}{2b+c}+\frac{a}{2c+a}\right)\right),$$

следовательно, последнее неравенство равносильно неравенству $\frac{1}{2}\left(3-\left(\frac{b}{2a+b}+\frac{c}{2b+c}+\frac{a}{2c+a}\right)\right)\le 1$, т.е. $\frac{a}{2c+a}+\frac{b}{2a+b}+$ $+\frac{c}{2b+c}\ge 1$. Применяя лемму Титу (12), получаем

$$\frac{a}{2c+a}+\frac{b}{2a+b}+\frac{c}{2b+c}=\frac{a^2}{a^2+2ac}+\frac{b^2}{b^2+2ab}+\frac{c^2}{c^2+2bc}\ge$$

$$\ge\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}=1.$$

3.30*. Оценим сверху слагаемые левой части:

$$\frac{ac}{ax^2+2bx+c}=\frac{ac}{(x+1)^2}\frac{(x+1)^2}{x(ax+b)+(bx+c)}\le$$

$$\le\frac{ac}{(x+1)^2}\left(\frac{x^2}{x(ax+b)}+\frac{1}{bx+c}\right)=\frac{1}{(x+1)^2}\left(\frac{acx}{ax+b}+\frac{ac}{bx+c}\right).$$

Здесь в оценке $\frac{(x+1)^2}{x(ax+b)+(bx+c)}\le\frac{x^2}{x(ax+b)}+\frac{1}{bx+c}$ мы применили лемму Титу (12). Циклически переставив переменные в получившемся неравенстве $\dfrac{ac}{ax^2+2bx+c} \le \dfrac{1}{(x+1)^2}\left(\dfrac{acx}{ax+b}+\right.$ $\left.+\dfrac{ac}{bx+c}\right)$, имеем еще два: $\dfrac{ab}{bx^2+2cx+a} \le \dfrac{1}{(x+1)^2}\left(\dfrac{abx}{bx+c}+\right.$ $\left.+\dfrac{ab}{cx+a}\right)$ и $\dfrac{bc}{cx^2+2ax+b} \le \dfrac{1}{(x+1)^2}\left(\dfrac{bcx}{cx+a}+\dfrac{bc}{ax+b}\right)$. Сложив эти три неравенства, получим исходное.

3.31*. Используем лемму Титу (12):

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}=\frac{a^2}{a^2+ab}+\frac{b^2}{b^2+bc}+\frac{c^2}{c^2+ca}\ge$$

$$\le\frac{(a+b+c)^2}{a^2+ab+b^2+bc+c^2+ca}=\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2-(ab+ac+bc)}.$$

Если

$$\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2-(ab+ac+bc)}\ge\frac{a+b+c}{a+b+c-\sqrt[3]{abc}}, \qquad (50)$$

то исходное неравенство доказано. Неравенство (50) равносильно

$$ab+ac+bc\ge(a+b+c)\sqrt[3]{abc}. \qquad (51)$$

Чтобы проверить, выполняется ли последнее неравенство для всех положительных a, b и c, рассмотрим многочлен $P(x,y,z)=x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3-\left(x^3+y^3+z^3\right)xyz$. Это выражение получится после замены в последнем неравенстве a на x^3, b на y^3, c на z^3 и переноса всех слагаемых влево. Разложив многочлен на множители, получим произведение $\left(xy-z^2\right)\left(yz-x^2\right)\left(zx-y^2\right)$. Отсюда видно, что если $x\le y\le z$ и $y^2\ge zx$, то $P(x,y,z)\ge 0$, а если $x\le y\le z$ и $y^2\le zx$, то $P(x,y,z)\le 0$. Например, $P(1,2,3)=35>0$, а $P(1,2,5)=$ $=-207<0$. Таким образом, неравенство (51) верно не для всех положительных значений переменных, но для тех наборов (a, b, c), для которых оно верно, исходное неравенство тоже верно.

Рассмотрим теперь тройку положительных чисел a, b, c, для которых неравенство (51) неверно, т.е.

$$ab+ac+bc\le(a+b+c)\sqrt[3]{abc}. \qquad (52)$$

Снова используем лемму Титу. Получаем

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}=\frac{a^2c^2}{a^2c^2+c^2ab}+\frac{b^2a^2}{b^2a^2+a^2bc}+\frac{c^2b^2}{c^2b^2+b^2ca}\geq$$

$$\geq\frac{(ab+ac+bc)^2}{a^2b^2+a^2bc+b^2c^2+b^2ca+c^2a^2+c^2ab}=$$

$$=\frac{(ab+ac+bc)^2}{(ab+ac+bc)^2-abc(a+b+c)}=$$

$$=\frac{(ab+ac+bc)^2}{(ab+ac+bc)^2-\sqrt[3]{abc}\cdot\left(\sqrt[3]{abc}\right)^2\cdot(a+b+c)}\geq$$

$$\geq\frac{(ab+ac+bc)^2}{(ab+ac+bc)^2-\sqrt[3]{abc}\cdot\left(\frac{ab+ac+bc}{a+b+c}\right)^2\cdot(a+b+c)}=$$

$$=\frac{a+b+c}{a+b+c-\sqrt[3]{abc}}.$$

Делая последнюю оценку, мы использовали неравенство (52). Таким образом, исходное неравенство верно для всех положительных значений переменных.

Глава 4. Индукция в доказательстве неравенств

4.6. Запишем неравенство в виде $\left(1+\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)^n>n$. Последнее неравенство следует из неравенства Бернулли (см. задачу 4.2), если положить в нем $x=1-\frac{1}{n}$.

4.7. Проверим базу индукции. При $n = 3$ неравенство верно: $3!=6>4=2^2$. Докажем индукционный переход от $n = k$ к $n = k+1$ для $k\geq 3$. Имеем $(k+1)!=k!\cdot(k+1)>2^{k-1}(k+1)$. Теперь достаточно доказать, что $2^{k-1}(k+1)\geq 2^k$. Поделив обе части последнего неравенства на 2^{k-1}, получим равносильное верное неравенство $k+1\geq 2$. Индукционный переход доказан.

4.8. Поделим обе части неравенства на $n^2(n+1)^{n-1}$, получим равносильное $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1}>\frac{n+1}{n^2}$, т.е. $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n-1}>\frac{n+1}{n^2}$. Воспользуемся неравенством Бернулли (см. задачу 4.2), тогда

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n-1}>1+\frac{-1}{n+1}\cdot(n-1)=\frac{2}{n+1}.$$

Теперь достаточно доказать, что $\frac{2}{n+1}\geq\frac{n+1}{n^2}$, что равносильно неравенству $n^2-2n-1\geq 0$, т.е. $(n-1)^2\geq 2$. Последнее неравенство верно в силу того, что $n\geq 3$.

4.9. Приведя слагаемые внутри каждой скобки к общему знаменателю и домножив обе части неравенства на $n^n\cdot n!$, получим равносильное неравенство

$$n!\cdot(2n-1)(2n-3)\cdot\ldots\cdot 1>n^n.$$

Докажем его индукцией по n. Проверим базу индукции. При $n=2$ неравенство верно: $2!\cdot 3=6>4=2^2$. Докажем индукционный переход от $n=k$ к $n=k+1$. Имеем

$$(k+1)!\cdot(2k+1)(2k-1)\cdot\ldots\cdot 1=$$

$$=(k+1)(2k+1)\cdot k!\cdot(2k-1)(2k-3)\cdot\ldots\cdot 1>(k+1)(2k+1)k^k.$$

Теперь достаточно показать, что $(k+1)(2k+1)k^k\geq(k+1)^{k+1}$. Это неравенство равносильно $\left(\frac{k}{k+1}\right)^k\geq\frac{1}{2k+1}$, т.е. $\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^k\geq\frac{1}{2k+1}$. Для того, чтобы его доказать, положим $x=-\frac{1}{k+1}$ в неравенстве Бернулли (см. задачу 4.2), получим, что

$$\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^k>1-\frac{k}{k+1}=\frac{1}{k+1}>\frac{1}{2k+1}.$$

Индукционный переход доказан.

4.10. Проверим базу индукции. При $n=2$ неравенство верно: $2!\cdot 4!=2\cdot 24=48>36=(3!)^2$. Докажем индукционный переход от $n=k$ к $n=k+1$. Имеем

$$2!\cdot 4!\cdot\ldots\cdot(2(k+1))!=(2!\cdot 4!\cdot\ldots\cdot(2k)!)\cdot(2k+2)!>$$

$$>((k+1)!)^k\cdot(2k+2)!.$$

Теперь достаточно доказать, что $((k+1)!)^k\cdot(2k+2)!\geq$ $\geq((k+2)!)^{k+1}$. Преобразовав левую и правую части неравенства, получим

$$\left((k+1)!\right)^k \cdot (2k+2)! \geq \left((k+1)! \cdot (k+2)\right)^k \cdot (k+1)! \cdot (k+2).$$

Поделив обе части неравенства на $\left((k+1)!\right)^k$, придем к неравенству $(2k+2)! \geq (k+1)! \cdot (k+2)^{k+1}$. Последнее неравенство преобразуем к виду

$$(k+1)! \cdot (k+2)(k+3)\ldots(2k+2) \geq (k+1)! \cdot (k+2)^{k+1}.$$

Это неравенство верно, поскольку $(k+2)(k+3)\ldots(2k+2) > > (k+2)^{k+1}$. Индукционный переход доказан.

4.11. Проверим базу индукции. При $n = 1$ неравенство верно: $2! = 2 < 4 = 2^2 \cdot (1!)^2$. Докажем индукционный переход от $n = k$ к $n = k + 1$. Имеем

$$\left(2(k+1)\right)! = (2k)! \cdot (2k+1)(2k+2) < 2^{2k} \cdot (k!)^2 \cdot (2k+1)(2k+2).$$

Теперь покажем, что $2^{2k} \cdot (k!)^2 \cdot (2k+1)(2k+2) \leq 2^{2k+2} \cdot \left((k+1)!\right)^2$. Поскольку $(k+1)! = k! \cdot (k+1)$, то, поделив обе части последнего неравенства на число $4^k \cdot (k!)^2$, получим равносильное неравенство $(2k+1)(2k+2) \leq 4(k+1)^2$, т.е. $4k^2 + 6k + 2 \leq 4k^2 + 8k + 4$. Это неравенство верно, следовательно, индукционный переход доказан.

4.12. Разделив обе части неравенства на $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, получим равносильное неравенство

$$\left(\frac{1+\dfrac{1}{n-1}}{1+\dfrac{1}{n}}\right)^n > 1+\frac{1}{n}.$$

Упростим выражение в скобках:

$$\frac{1+\dfrac{1}{n-1}}{1+\dfrac{1}{n}} = \frac{n(n-1)+n}{n(n-1)+n-1} = \frac{n^2}{n^2-1} = 1+\frac{1}{n^2-1}.$$

Воспользуемся неравенством Бернулли (см. задачу 4.2), получим

$$\left(\frac{1+\dfrac{1}{n-1}}{1+\dfrac{1}{n}}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1+n\cdot\frac{1}{n^2-1} > 1+\frac{n}{n^2} = 1+\frac{1}{n}.$$

4.13. Докажем неравенство индукцией по n. Проверим базу индукции. При $n = 2$ получаем верное неравенство $(1-x)^2 + (1+x)^2 = 2\left(1+x^2\right) < 4$. Предположим теперь, что $(1-x)^n + (1+x)^n < 2^n$. Тогда

$$(1-x)^{n+1} + (1+x)^{n+1} <$$

$$< \left((1-x)^n + (1+x)^n\right) \cdot \left((1-x) + (1+x)\right) < 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}.$$

4.14. Проверим базу индукции. При $n = 3$ неравенство верно: $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{37}{60} > \frac{3}{5}$. Докажем индукционный переход от $n = k$ к $n = k + 1$. Имеем

$$\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{2k+2} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k} +$$

$$+\left(\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k} + \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}\right) >$$

$$> \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k} > \frac{3}{5}.$$

4.15. При $n = 1$ неравенство верно. Докажем индукционный переход от $n = k$ к $n = k + 1$:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1},$$

так как

$$2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) = \frac{2}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} > \frac{2}{2\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

4.16. При $n = 1$ неравенство верно. Докажем индукционный переход от $n = k$ к $n = k + 1$:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} >$$

$$> 2\left(\sqrt{k+1} - 1\right) + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > 2\left(\sqrt{k+2} - 1\right),$$

так как

$$2\left(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}\right) = \frac{2}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}} < \frac{2}{2\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

4.17. Применим метод математической индукции. Проверим базу индукции. Пусть $n = 4$, тогда исходное неравенство запишется как $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1) \geq 0$, что в свою очередь равносильно верному неравенству

$$(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 \geq 0 .$$

Пусть исходное неравенство справедливо для некоторого $n = k$ ($k \geq 4$). Докажем, что тогда оно будет верно и для $n = k + 1$. Выберем такой номер $i \in \{1, 2, \ldots, k+1\}$, что $x_i = \max\{x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_{k+1}\}$. В силу цикличности неравенства можно считать, что $i = 4$. Тогда по индукционному предположению можно утверждать, что

$$\begin{aligned}
&(x_1 + (x_2 + x_3) + x_4 + \ldots + x_{k+1})^2 \geq \\
&\quad\geq 4(x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)x_4 + \ldots + x_kx_{k+1} + x_{k+1}x_1) = \\
&\quad= 4(x_1x_2 + (x_1x_3 + x_2x_4) + x_3x_4 + \ldots + x_kx_{k+1} + x_{k+1}x_1) \geq \\
&\quad\geq 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \ldots + x_kx_{k+1} + x_{k+1}x_1),
\end{aligned}$$

поскольку $x_1x_3 + x_2x_4 \geq x_2x_3$. Индукционный переход осуществлен, исходное неравенство доказано.

4.18. (Неравенство Коробова) Докажем методом математической индукции, что данное неравенство выполнено при любом натуральном n.

При $n = 1$ имеем верное неравенство $a_1^2 \leq a_1^2$. Пусть неравенство справедливо для $n = k$. Докажем, что тогда оно будет верно и для $n = k + 1$. Обозначим

$$S_k = \frac{a_1}{\sqrt{1} + \sqrt{0}} + \frac{a_2}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} + \ldots + \frac{a_k}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} .$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{a_1}{\sqrt{1} + \sqrt{0}} + \frac{a_2}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} + \ldots + \frac{a_k}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} + \frac{a_{k+1}}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}\right)^2 = \\
&\quad= \left(S_k + \frac{a_{k+1}}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}\right)^2 = \\
&\quad= S_k^2 + 2S_k \cdot \frac{a_{k+1}}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} + \left(\frac{a_{k+1}}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}\right)^2 \geq \\
&\quad\geq a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2 + 2S_k \cdot \frac{a_{k+1}}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} + \left(\frac{a_{k+1}}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}\right)^2 .
\end{aligned}$$

Теперь достаточно доказать, что

$$2S_k \cdot \frac{a_{k+1}}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} + \left(\frac{a_{k+1}}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}\right)^2 \geq a_{k+1}^2 .$$

Поскольку $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_{k+1} \geq 0$, то

$$S_k = \frac{a_1}{\sqrt{1}+\sqrt{0}} + \frac{a_2}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \ldots + \frac{a_k}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} \geq$$

$$\geq a_{k+1}\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{0}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}\right) =$$

$$= a_{k+1}\left(\left(\sqrt{1}-\sqrt{0}\right)+\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)+\ldots+\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)\right) =$$

$$= a_{k+1}\sqrt{k} .$$

Тогда

$$2S_k \cdot \frac{a_{k+1}}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} + \left(\frac{a_{k+1}}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}\right)^2 \geq 2a_{k+1}\sqrt{k} \cdot \frac{a_{k+1}}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} +$$

$$+\left(\frac{a_{k+1}}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}\right)^2 = \frac{a_{k+1}^2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}\left(2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}\right) =$$

$$= \frac{a_{k+1}^2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}\left(2\sqrt{k}+\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) = a_{k+1}^2 ,$$

т.е. исходное неравенство верно для любого n.

4.19. Воспользуемся методом математической индукции. При $n = 2$ получаем очевидное неравенство $\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}} < \sqrt{3} < 2$. Проведем индукционный переход от $n-1$ к n для правого неравенства. По предположению индукции имеем

$$\sqrt{n+\sqrt{n-1+\sqrt{n-2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}} <$$

$$< \sqrt{n+\frac{1}{2}+\sqrt{(n-1)+\frac{1}{4}}} < \sqrt{n+\frac{1}{2}+\sqrt{n+\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2}+\sqrt{n+\frac{1}{4}} .$$

Сделаем теперь индукционный переход от $n-1$ к n для левого неравенства. По предположению индукции достаточно доказать, что $\frac{1}{2}+\sqrt{n-\frac{1}{2}} \leq \sqrt{n+\frac{1}{2}+\sqrt{n-\frac{3}{2}}}$. Возводя обе части в квадрат, получаем $n-\frac{1}{4}+\sqrt{n-\frac{1}{2}} \leq n+\frac{1}{2}+\sqrt{n-\frac{3}{2}}$, что равносильно неравенству $\sqrt{n-\frac{1}{2}}-\sqrt{n-\frac{3}{2}}\le\frac{3}{4}$. Теперь достаточно заметить, что при любом $n\ge 2$ имеем

$$\sqrt{n-\frac{1}{2}}-\sqrt{n-\frac{3}{2}}=\frac{1}{\sqrt{n-\frac{1}{2}}+\sqrt{n-\frac{3}{2}}}\le\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}}<\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}<\frac{3}{4}.$$

4.20. (Неравенство Гюйгенса) Применим индукцию вверх и вниз. Докажем сначала это неравенство для $n=2^t$, где t – натуральное число. Пусть оно верно для $n = k$. Докажем, что тогда оно верно и для $n = 2k$. Пусть $x_1,\ldots,x_k,x_{k+1},\ldots,x_{2k}\ge 0$. Положим $a=\sqrt[k]{x_1\ldots x_k}$, $b=\sqrt[k]{x_{k+1}\ldots x_{2k}}$. Имеем

$$(1+x_1)\ldots(1+x_k)(1+x_{k+1})\ldots(1+x_{2k})\ge$$
$$\ge\left(1+\sqrt[k]{x_1\ldots x_k}\right)^k\left(1+\sqrt[k]{x_{k+1}\ldots x_{2k}}\right)^k=\left((1+a)(1+b)\right)^k=$$
$$=(1+ab+a+b)^k\ge\left(1+ab+2\sqrt{ab}\right)^k=\left(1+\sqrt{ab}\right)^{2k}=$$
$$=\left(1+\sqrt[2k]{x_1\ldots x_{2k}}\right)^{2k},$$

следовательно, исходное неравенство справедливо для всех $n=2^t$, где t – натуральное.

Теперь докажем, что если данное неравенство справедливо для $n = m + 1$, то оно выполняется также в случае $n = m$, где m – натуральное. Имеем

$$(1+x_1)\ldots(1+x_m)(1+c)\ge\left(1+\sqrt[m+1]{x_1\ldots x_m c}\right)^{m+1}$$

для всех $x_1,\ldots,x_m,c\ge 0$. Положим $c=\sqrt[m]{x_1\ldots x_m}$. Тогда

$$(1+x_1)\ldots(1+x_m)\ge\left(1+\sqrt[m+1]{c^m c}\right)^{m+1}(1+c)^{-1}=(1+c)^m=$$
$$=\left(1+\sqrt[m]{x_1\ldots x_m}\right)^m.$$

Окончательно получаем, что исходное неравенство верно для всех натуральных n.

4.21. (Неравенство Ки Фана, или Фань Цзы) Применим индукцию вверх и вниз. Докажем сначала это неравенство для всех n, равных степеням двойки с натуральными показателями. Проверим базу индукции. При $n = 2$ исходное неравенство эквивалентно неравенству

$$\left(\frac{2}{a+b}-1\right)^2\le\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right),$$

где $a, b \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$. Имеем

$$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)-\left(\frac{2}{a+b}-1\right)^2=\frac{1}{ab}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{4}{(a+b)^2}+\frac{4}{a+b}=$$

$$=\frac{1}{ab}-\frac{4}{(a+b)^2}+\frac{4}{a+b}-\frac{a+b}{ab}=\frac{(a-b)^2}{ab(a+b)^2}-\frac{(a-b)^2}{ab(a+b)}=$$

$$=\frac{(a-b)^2(1-a-b)}{ab(a+b)^2}\geq 0.$$

База индукции доказана. Предположим, что исходное неравенство верно для $n = k$. Докажем, что тогда оно верно для $n = 2k$. Имеем

$$\frac{x_1\ldots x_k x_{k+1}\ldots x_{2k}}{(x_1+\ldots+x_k+x_{k+1}+\ldots+x_{2k})^{2k}}=$$

$$=\frac{x_1\ldots x_k}{(x_1+\ldots+x_k)^k}\cdot\frac{x_{k+1}\ldots x_{2k}}{(x_{k+1}+\ldots+x_{2k})^k}\times$$

$$\times\frac{(x_1+\ldots+x_k)^k(x_{k+1}+\ldots+x_{2k})^k}{(x_1+\ldots+x_{2k})^{2k}}\leq\frac{(1-x_1)\ldots(1-x_k)}{((1-x_1)+\ldots+(1-x_k))^k}\times$$

$$\times\frac{(1-x_{k+1})\ldots(1-x_{2k})}{((1-x_{k+1})+\ldots+(1-x_{2k}))^k}\cdot\left(\frac{\frac{x_1+\ldots+x_k}{k}\cdot\frac{x_{k+1}+\ldots+x_{2k}}{k}}{\left(\frac{x_1+\ldots+x_k}{k}+\frac{x_{k+1}+\ldots+x_{2k}}{k}\right)^2}\right)^k\leq$$

$$\leq\frac{(1-x_1)\ldots(1-x_{2k})}{((1-x_1)+\ldots+(1-x_k))^k((1-x_{k+1})+\ldots+(1-x_{2k}))^k}\times$$

$$\times\left(\frac{\left(1-\frac{x_1+\ldots+x_k}{k}\right)\left(1-\frac{x_{k+1}+\ldots+x_{2k}}{k}\right)}{\left(\left(1-\frac{x_1+\ldots+x_k}{k}\right)+\left(1-\frac{x_{k+1}+\ldots+x_{2k}}{k}\right)\right)^2}\right)^k=$$

$$=\frac{(1-x_1)\ldots(1-x_{2k})}{((1-x_1)+\ldots+(1-x_{2k}))^{2k}}.$$

Таким образом, получили неравенство

$$\frac{x_1\ldots x_{2k}}{\left(x_1+\ldots+x_{2k}\right)^{2k}}\le\frac{\left(1-x_1\right)\ldots\left(1-x_{2k}\right)}{\left(\left(1-x_1\right)+\ldots+\left(1-x_{2k}\right)\right)^{2k}},$$

следовательно, в случае $n=2^t$ (t – натуральное) исходное неравенство доказано. Теперь докажем, что если исходное неравенство справедливо для $n = m + 1$, то оно выполняется также в случае $n = m$, где $m\ge 1$. Имеем

$$\frac{x_1\ldots x_{m+1}}{\left(x_1+\ldots+x_{m+1}\right)^{m+1}}\le\frac{\left(1-x_1\right)\ldots\left(1-x_{m+1}\right)}{\left(\left(1-x_1\right)+\ldots+\left(1-x_{m+1}\right)\right)^{m+1}}.$$

Положим $x_{m+1}=\dfrac{x_1+\ldots+x_m}{m}$. Поскольку $x_{m+1}\le\dfrac{1}{2}$, то

$$\frac{x_1\ldots x_m\cdot\dfrac{x_1+\ldots+x_m}{m}}{\left(x_1+\ldots+x_m+\dfrac{x_1+\ldots+x_m}{m}\right)^{m+1}}\le$$

$$\le\frac{\left(1-x_1\right)\ldots\left(1-x_m\right)\left(1-\dfrac{x_1+\ldots+x_m}{m}\right)}{\left(\left(1-x_1\right)+\ldots+\left(1-x_m\right)+\left(1-\dfrac{x_1+\ldots+x_m}{m}\right)\right)^{m+1}},$$

откуда следует, что

$$\frac{x_1\ldots x_m}{\left(x_1+\ldots+x_m\right)^m}\le\frac{\left(1-x_1\right)\ldots\left(1-x_m\right)}{\left(\left(1-x_1\right)+\ldots+\left(1-x_m\right)\right)^m}.$$

Окончательно получаем, что исходное неравенство верно для всех натуральных n.

4.22*. Неравенство равносильно следующему:

$$\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)\left(x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n+x_nx_1\right)>$$

$$>4\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right).\quad(53)$$

Воспользуемся методом математической индукции. Заметим, что при $n = 4$ неравенство (53) становится нестрогим (см. задачу 1.37). Шаг индукции сформулируем в следующем виде. Предположим, что при $n = k$ имеет место неравенство (53) в нестрогой форме (здесь $k\ge 4$). Докажем, что при $n = k + 1$ имеет место строгое неравенство (53), т.е.

$$\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_{k-1}}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\times$$
$$\times\left(x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{k-1}a+ab+bx_1\right)>$$
$$>4\left(x_1+x_2+\ldots+x_{k-1}+a+b\right), \quad (54)$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$, a, $b>0$. Поскольку $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{ab/(a+b)}$, то из индукционного предположения имеем

$$\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_{k-1}}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\times$$
$$\times\left(x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{k-2}x_{k-1}+\frac{x_{k-1}ab}{a+b}+\frac{abx_1}{a+b}\right)\geq$$
$$\geq 4\left(x_1+x_2+\ldots+x_{k-1}+\frac{ab}{a+b}\right).$$

Обозначим

$$A=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_{k-1}}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b},$$
$$B=x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{k-2}x_{k-1}+\frac{x_{k-1}ab}{a+b}+\frac{abx_1}{a+b},$$
$$C=x_1+x_2+\ldots+x_{k-1}+\frac{ab}{a+b}.$$

Тогда неравенство (54) запишется в виде

$$A\left(B+x_{k-1}a+ab+bx_1-\frac{ab\left(x_{k-1}+x_1\right)}{a+b}\right)>4\left(C+a+b-\frac{ab}{a+b}\right).$$

Так как $AB\geq 4C$, то достаточно доказать, что

$$A\left(x_{k-1}a+ab+bx_1-\frac{ab\left(x_{k-1}+x_1\right)}{a+b}\right)>4\left(a+b-\frac{b}{a+b}\right),$$

а последнее неравенство, в свою очередь, будет установлено, если мы докажем неравенство

$$\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_{k-1}}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\times$$
$$\times\left(x_{k-1}a+ab+bx_1-\frac{ab\left(x_{k-1}+x_1\right)}{a+b}\right)>4\left(a+b-\frac{ab}{a+b}\right).$$

Переобозначим переменные $c = x_1$, $d = x_{k-1}$, домножим обе части последнего неравенства на $a + b$ и приведем подобные слагаемые, получим

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\left(a^2b+ab^2+a^2d+b^2c\right)>4\left(a^2+ab+b^2\right).$$

После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых придем к равносильному неравенству

$$\frac{a^2d}{b}+\frac{a^2b}{d}+\frac{b^2a}{c}+\frac{b^2c}{a}+\frac{a^2d}{c}+\frac{b^2c}{d}+ad+\frac{ab^2}{d}+\frac{a^2b}{c}+bc>$$

$$>2a^2+2ab+2b^2, \quad (55)$$

доказав которое для $a, b, c, d > 0$, мы завершим доказательство исходного неравенства. Действительно, из неравенства Коши для двух переменных имеем следующие неравенства:

$$\frac{a^2d}{b}+\frac{a^2b}{d}\geq 2a^2, \quad \frac{b^2a}{c}+\frac{b^2c}{a}\geq 2b^2,$$

$$\frac{a^2d}{c}+\frac{b^2c}{d}\geq 2ab, \quad ad+\frac{ab^2}{d}\geq 2ab, \quad \frac{a^2b}{c}+bc\geq 2ab.$$

Сложив их и прибавив очевидное неравенство $4ab > 0$, получим неравенство, равносильное (55).

Замечание. Можно доказать, что если в исходном неравенстве число 4 заменить бо́льшим, то неравенство перестанет быть верным.

Возьмем произвольное положительное ε (можно считать, что $\varepsilon < 1$), положим $t=\dfrac{5(n-2)}{\varepsilon}$, $x_1 = x_{n-1} = 1$, $x_2 = x_3 = \ldots = x_{n-2} = t$, $x_n = t^3$ и докажем, что

$$\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)\left(x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n+x_nx_1\right)<$$

$$<(4+\varepsilon)\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right).$$

Последнее неравенство запишем в виде

$$\left(2+\frac{n-3}{t}+\frac{1}{t^3}\right)\left(2t^3+(n-4)t^2+2t\right)<(4+\varepsilon)\left(t^3+t(n-3)+2\right).$$

Поделив обе части на t^3, получим равносильное неравенство

$$\left(2+\frac{n-3}{t}+\frac{1}{t^3}\right)\left(2+\frac{n-4}{t}+\frac{2}{t^2}\right)<(4+\varepsilon)\left(1+\frac{n-3}{t^2}+\frac{2}{t^3}\right).$$

Оно будет доказано, если мы установим, что

$$\left(2+\frac{n-3}{t}+\frac{1}{t^3}\right)\left(2+\frac{n-4}{t}+\frac{2}{t^2}\right)<4+\varepsilon\,.$$

Поскольку $t > 1$, то

$$\left(2+\frac{n-3}{t}+\frac{1}{t^3}\right)\left(2+\frac{n-4}{t}+\frac{2}{t^2}\right)<$$
$$<\left(2+\frac{n-3}{t}+\frac{1}{t}\right)\left(2+\frac{n-4}{t}+\frac{2}{t}\right)=\left(2+\frac{n-2}{t}\right)^2,$$

следовательно, достаточно доказать, что $\left(2+\frac{n-2}{t}\right)^2<4+\varepsilon$. Но так как $\frac{n-2}{t}=\frac{\varepsilon}{5}<1$, то

$$\left(2+\frac{n-2}{t}\right)^2=4+\frac{4(n-2)}{t}+\left(\frac{n-2}{t}\right)^2<4+\frac{4(n-2)}{t}+\frac{n-2}{t}=4+\varepsilon\,.$$

4.23*. Докажем по индукции неравенство $2^{n-1}\geq n+1$ для $n\geq 3$. При $n = 3$ имеем $2^{3-1}\geq 3+1$, а из $2^{k-1}\geq k+1$ вытекает, что $2^k\geq 2(k+1)>k+2$. Из доказанного неравенства следует, что

$$\sqrt[n-1]{n+1}\leq 2 \qquad (56)$$

при $n\geq 3$. Заметим, что $2^{1993}>1993$, откуда следует, что $\sqrt[1993]{1993}<2$. Используя это неравенство и неравенство (56), последовательно получаем

$$\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\ldots+\sqrt[1992]{1992+\sqrt[1993]{1993}}}}<$$
$$<\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\ldots+\sqrt[1992]{1992+2}}}\leq\ldots\leq\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\ldots+\sqrt[k]{k+2}}}\leq\ldots$$
$$\ldots\leq\sqrt{2+\sqrt[3]{3+2}}\leq\sqrt{2+2}=2\,.$$

4.24*. Пусть $a=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n-1\text{ радикалов}}$. Тогда имеем равенство $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n\text{ радикалов}}=\sqrt{2+a}$. Таким образом, требуется доказать, что

$$\frac{2-\sqrt{2+a}}{2-a}>\frac{1}{4}\,.$$

Индукцией по n легко доказать, что $a < 2$. Поэтому следующие неравенства эквивалентны требуемому:

$$8 - 4\sqrt{2+a} > 2 - a, \quad 6 + a > 4\sqrt{2+a}\ .$$

После возведения в квадрат получаем неравенство $36 + 12a + a^2 > 32 + 16a$, т.е. $(a-2)^2 > 0$.

4.25*. Обозначим $a_k = \sqrt{k\sqrt{(k+1)\cdot \ldots \cdot \sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}}$, где $2 \le k \le n$. Тогда из неравенства Коши $\sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2}$ получаем

$$a_n = \sqrt{n} \le \frac{1}{2} + \frac{n}{2},$$

$$a_{n-1} = \sqrt{(n-1)\sqrt{n}} = \sqrt{(n-1)a_n} \le \frac{1}{4} + \frac{n}{4} + \frac{n-1}{2},$$

$$a_{n-2} = \sqrt{(n-2)\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}} = \sqrt{(n-2)a_{n-1}} \le \frac{1}{8} + \frac{n}{8} + \frac{n-1}{4} + \frac{n-2}{2},$$

. . . .

$$a_2 = \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\cdot \ldots \cdot \sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}}} \le \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^{n-1}} + \frac{n-1}{2^{n-2}} + \ldots + \frac{3}{4} + \frac{2}{2}.$$

Методом математической индукции легко доказывается равенство

$$\frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \ldots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

Тогда последнее неравенство запишется как

$$a_2 \le \frac{1}{2^{n-1}} + 2\left(\frac{n}{2^n} + \frac{n-1}{2^{n-1}} + \ldots + \frac{3}{2^3} + \frac{2}{2^2} + \frac{1}{2^1}\right) - 1 =$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} + 4 - \frac{2(n+2)}{2^n} - 1 = 3 - \frac{n+1}{2^{n-1}} < 3,$$

что и требовалось.

Глава 5. Симметричные и однородные неравенства

5.4. Если $a = b = 0$, то неравенство верно. Пусть хотя бы одна из переменных не равна 0. Заметим, что если ввести новые переменные x и y, определенные формулами $x = \dfrac{a}{c}$, $y = \dfrac{b}{c}$, где c – произвольная положительная константа, и сделать замену переменных, то после сокращения на константу

$c^{\frac{n(n+1)}{2}}$ получим то же самое неравенство с точностью до обозначений переменных. Подберем теперь число c так, чтобы новые переменные удовлетворяли условию

$$x^{n+1} + y^{n+1} = 1. \qquad (57)$$

Для этого возьмем $c = \sqrt[n+1]{a^{n+1} + b^{n+1}}$. Теперь достаточно доказать неравенство

$$(x + y)\left(x^2 + y^2\right)\ldots\left(x^n + y^n\right) \geq 1. \qquad (58)$$

Из условия (57) следует, что $x, y \leq 1$. Тогда $x^i + y^i \geq x^{n+1} + y^{n+1} = 1$ для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, откуда получаем (58).

5.5. Если все a_i равны 0, то неравенство верно. Пусть хотя бы одна из переменных не равна 0. Если ввести новые переменные x_i для $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, определенные формулами $x_i = \frac{a_i}{c}$, где c – произвольная положительная константа, и сделать замену переменных, то после сокращения на константу $c^{\alpha\beta}$ получим то же самое неравенство с точностью до обозначений переменных. Подберем теперь число c так, чтобы новые переменные удовлетворяли условию

$$x_1^\beta + x_2^\beta + \ldots + x_n^\beta = 1. \qquad (59)$$

Для этого возьмем $c = \left(a_1^\beta + a_2^\beta + \ldots + a_n^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}}$. Тогда будет достаточно доказать неравенство $x_1^\alpha + x_2^\alpha + \ldots + x_n^\alpha \leq 1$. Из условия (59) следует, что все x_i не превосходят 1, а так как $0 < \beta < \alpha$, то $x_i^\alpha \leq x_i^\beta$. Тогда $x_1^\alpha + x_2^\alpha + \ldots + x_n^\alpha \leq x_1^\beta + x_2^\beta + \ldots + x_n^\beta = 1$.

5.6. Если $x = y = z = 0$, то неравенство верно. Пусть хотя бы одна из переменных не равна 0. Если ввести новые переменные a, b, c, определенные формулами $a = \frac{x}{\alpha}$, $b = \frac{y}{\alpha}$, $c = \frac{z}{\alpha}$, где α – произвольная положительная константа, и сделать замену переменных, то после сокращения на константу α^6 получим то же самое неравенство с точностью до обозначений переменных. Подберем теперь число α так, чтобы новые переменные удовлетворяли условию

$$a^3 + b^3 + c^3 = 1. \qquad (60)$$

Для этого возьмем $\alpha = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3}$. Поскольку для новых переменных имеют место равенства $\left(a^2 + bc\right)\left(b^2 + ca\right)\left(c^2 + ab\right) =$

$= 2a^2b^2c^2 + abc\left(a^3+b^3+c^3\right) + a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = 2a^2b^2c^2 + abc +$ $+ a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3$, исходное неравенство запишется как $8 \ge 9\left(2a^2b^2c^2 + abc + a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3\right)$, т.е.

$$2a^2b^2c^2 + abc + a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 \le \frac{8}{9}.$$

Из условия (60) и неравенства между средними геометрическим и кубическим имеем $abc \le \frac{a^3+b^3+c^3}{3} = \frac{1}{3}$. Из неравенства задачи 1.25 получаем, что $a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 \le \frac{\left(a^3+b^3+c^3\right)^2}{3} = \frac{1}{3}$, следовательно,

$$2a^2b^2c^2 + abc + a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 \le \frac{2}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{8}{9}.$$

5.7*. Заметим, что если ввести новые переменные x_i для $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, определенные формулами $x_i = \frac{a_i}{c}$, где c – произвольная положительная константа, и сделать замену переменных, то после сокращения всех дробей на константу c получим то же самое неравенство с точностью до обозначений переменных. Подберем теперь число c так, чтобы новые переменные удовлетворяли условию $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$. Для этого возьмем $c = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Тогда исходное неравенство запишется как

$$\frac{x_1}{1-x_1} + \frac{x_2}{1-x_2} + \ldots + \frac{x_n}{1-x_n} \ge \frac{n}{n-1},$$

где $x_i \in (0; 1)$, $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$. Рассмотрим неравенство

$$\frac{x}{1-x} \ge Ax + B, \qquad (61)$$

в котором коэффициенты A и B мы подберем так, чтобы оно было верным при $x \in (0; 1)$ и выполнялось условие

$$A + nB = \frac{n}{n-1}. \qquad (62)$$

При $x \in (0; 1)$ неравенство (61) равносильно $Ax^2 + (B + 1 - A)x -$ $- B \ge 0$. Чтобы это неравенство было верным, достаточно, чтобы было $A > 0$ и дискриминант квадратного трехчлена в левой части был нулевым, т.е. $(B + 1 - A)^2 + 4AB = 0$. Подставляя в это равенство вместо A выражение $\frac{n}{n-1} - nB$ (см. условие (62)), получаем уравнение $\left(B+1+nB-\dfrac{n}{n-1}\right)^2+4\left(\dfrac{n}{n-1}-nB\right)B=0$ относительно коэффициента B. Преобразовав его левую часть, получим $\left((n-1)B+\dfrac{1}{n-1}\right)^2=0$, откуда следует, что $B=-\dfrac{1}{(n-1)^2}$. Тогда $A=\dfrac{n^2}{(n-1)^2}$. Применим теперь неравенство (61) к переменным x_i, где $i\in\{1,2,\ldots,n\}$. Сложив получившиеся n неравенств, имеем

$$\frac{x_1}{1-x_1}+\frac{x_2}{1-x_2}+\ldots+\frac{x_n}{1-x_n}\geq A\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)+nB=$$

$$=A+nB=\frac{n}{n-1}.$$

5.8. (Неравенство Шура) Данное неравенство – симметричное и однородное порядка 3. Если $x=y=z=0$, то неравенство верно. Пусть z – не равная нулю переменная. Поделив обе части неравенства на z^3 и сделав замену переменных $a=\dfrac{x}{z}$, $b=\dfrac{y}{z}$, мы придем к неравенству

$$a^3+b^3+1-\left(a^2b+ab^2+b^2+b+a+a^2\right)+3ab\geq 0,$$

доказав которое для любых $a,b\geq 0$, получим требуемый результат. Сделаем еще одну замену переменных $u=a+b$, $v=ab$, причем новые переменные должны удовлетворять условиям $u\geq 0$, $0\leq v\leq\dfrac{u^2}{4}$. Тогда нам достаточно будет доказать неравенство $u\left(u^2-3v\right)+1-\left(uv+u+u^2-2v\right)+3v\geq 0$ или равносильное $(5-4u)v+\left(u^3-u^2-u+1\right)\geq 0$ для всех $v\in\left[0;\dfrac{u^2}{4}\right]$, где $u\geq 0$.

Рассмотрим функцию $f(v)=(5-4u)v+\left(u^3-u^2-u+1\right)$ и докажем, что на отрезке $\left[0;\dfrac{u^2}{4}\right]$ она принимает неотрицательные значения. Так как эта функция линейная, то достаточно доказать, что она принимает неотрицательные значения на концах данного отрезка: $f(0)=u^3-u^2-u+1=(u+1)(u-1)^2\geq 0$, $f\left(\dfrac{u^2}{4}\right)=(5-4u)\dfrac{u^2}{4}+u^3-u^2-u+1=\dfrac{(u-2)^2}{4}\geq 0$, что завершает доказательство неравенства.

5.9. Данное неравенство – симметричное и однородное порядка 4. Если $x = y = z = 0$, то неравенство верно. Пусть z – не равная нулю переменная. Поделив обе части неравенства на z^4 и сделав замену переменных $a = \frac{x}{z}$, $b = \frac{y}{z}$, мы придем к неравенству $3(a+b+1)(a+b)(b+1)(a+1) \geq 8(ab+a+b)^2$, доказав которое для любых $a, b \geq 0$, получим требуемый результат. Сделаем симметрическую замену переменных $u = a + b$, $v = ab$, причем новые переменные должны удовлетворять неравенствам $0 \leq v \leq \frac{u^2}{4}$, $u \geq 0$. Теперь достаточно будет доказать неравенство $3u(u+1)(v+u+1) - 8(v+u)^2 \geq 0$ или $-8v^2 + \left(3u^2 - 13u\right)v + 3u^3 - 2u^2 + 3u \geq 0$ для всех $\left[0; \frac{u^2}{4}\right]$, где $u \geq 0$. Рассмотрим функцию

$$f(v) = -8v^2 + \left(3u^2 - 13u\right)v + 3u^3 - 2u^2 + 3u$$

и докажем, что на отрезке $\left[0; \frac{u^2}{4}\right]$ она принимает неотрицательные значения. Так как эта функция квадратичная с отрицательным старшим коэффициентом, то она не имеет точек минимума, следовательно, достаточно доказать, что она принимает неотрицательные значения на концах данного отрезка:

$$f(0) = u\left(3u^2 - 2u + 3\right) \geq 0,$$

$$f\left(\frac{u^2}{4}\right) = \frac{u^4}{4} - \frac{u^3}{4} - 2u^2 + 3u = \frac{u(u-2)^2(u+3)}{4} \geq 0.$$

Здесь мы использовали неравенство $3u^2 - 2u + 3 \geq 0$, которое верно в силу того, что дискриминант левой части отрицателен, а старший коэффициент положителен. Исходное неравенство доказано.

5.10*. В случае, когда $x = y = z = 0$, неравенство верно, поэтому далее считаем, что $x^2 + y^2 + z^2 > 0$. Домножим обе части этого неравенства на $x^2 + y^2 + z^2$, получим равносильное неравенство

$$8\left(x^2 + y^2 + z^2\right)(xy + yz + zx)\left(x^3 + y^3 + z^3\right) \geq$$
$$\geq 3(x+y)(y+z)(z+x)\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2.$$

Поскольку

$$8\left(x^2+y^2+z^2\right)(xy+yz+zx) \ge 3(x+y+z)(x+y)(y+z)(z+x)$$

для всех $x, y, z \ge 0$ (см. задачу 5.2), то

$$8\left(x^2+y^2+z^2\right)(xy+yz+zx)\left(x^3+y^3+z^3\right) \ge$$

$$\ge 3(x+y+z)(x+y)(y+z)(z+x)\left(x^3+y^3+z^3\right).$$

Теперь достаточно доказать неравенство

$$(x+y+z)\left(x^3+y^3+z^3\right) \ge \left(x^2+y^2+z^2\right)^2,$$

а оно следует из неравенства задачи 1.54.

5.11*. Данное неравенство – симметричное и однородное порядка 6. Если $x = y = z = 0$, то неравенство верно. Пусть z – наибольшая из переменных, не равная нулю. Поделив обе части неравенства на z^6 и сделав замену переменных $a = \frac{x}{z}$, $b = \frac{y}{z}$, мы придем к неравенству

$$27(a+b)^2(a+1)^2(b+1)^2 \ge 64(a+b+1)^3 ab,$$

доказав которое для любых $a, b \in [0; 1]$, получим требуемый результат. Сделаем симметрическую замену переменных $u = a + b$, $v = ab$, причем новые переменные должны удовлетворять неравенству $0 \le v \le \frac{u^2}{4}$. Тогда нам достаточно будет доказать неравенство

$$27u^2(u+v+1)^2 \ge 64(u+1)^3 v$$

или эквивалентное ему

$$27u^2v^2 + \left(-10u^3 - 138u^2 - 192u - 64\right)v + 27u^4 + 54u^3 + 27u^2 \ge 0,$$

где $0 \le u \le 2$ (так как $u = a + b$ и $a, b \in [0; 1]$), $0 \le v \le \frac{u^2}{4}$.

Рассмотрим функцию

$$f(v) = 27u^2v^2 + \left(-10u^3 - 138u^2 - 192u - 64\right)v + 27u^4 + 54u^3 + 27u^2,$$

квадратичную относительно переменной v и определенную на промежутке $\left[0; \frac{u^2}{4}\right]$, где u неотрицательно. На правом конце этого промежутка она принимает неотрицательное значение:

$$f\left(\frac{u^2}{4}\right)=\frac{27u^6-40u^5-120u^4+96u^3+176u^2}{16}=$$

$$=\frac{u^2(u-2)^2\left(27u^2+68u+44\right)}{16}\geq 0 .$$

Покажем, что функция f на данном промежутке убывает. Точка минимума $v_{\min}=\dfrac{5u^3+69u^2+96u+32}{27u^2}$. Докажем, что $v_{\min}\geq\dfrac{u^2}{4}$ при $0\leq u\leq 2$. Для этого достаточно доказать неравенство $4\left(5u^3+69u^2+96u+32\right)-27u^4\geq 0$ или

$$-27u^4+20u^3+276u^2+384u+128\geq 0 .$$

Рассмотрим функцию $g(u)=-27u^4+20u^3+276u^2+384u+128$.

Если $0\leq u\leq 1$, то $g(u)\geq -27+128=101$. Если же $1\leq u\leq 2$, то $g(u)\geq -27\cdot 2^4+20+276+384+128=376$. Следовательно, $g(u)\geq 0$ для всех $u\in[0;2]$. Мы доказали, что функция f убывает на промежутке $\left[0;\dfrac{u^2}{4}\right]$, а так как на правом конце промежутка f неотрицательна, то и на всем промежутке она неотрицательна. Неравенство доказано.

5.12*. Сделаем симметрическую замену переменных $u=x+y$, $v=xy$, причем новые переменные должны удовлетворять неравенствам $2\sqrt{v}\leq u<2$, $0<v<1$. Тогда нам достаточно будет доказать неравенство

$$\frac{v(1-u+v)}{(1-v)^2}<\frac{1}{4} .$$

Но из условий на u и v имеем

$$\frac{v(1-u+v)}{(1-v)^2}\leq\frac{v\left(1-2\sqrt{v}+v\right)}{(1-v)^2}=\frac{v\left(1-\sqrt{v}\right)^2}{(1-v)^2}=$$

$$=\frac{v\left(1-\sqrt{v}\right)^2}{\left(1-\sqrt{v}\right)^2\left(1+\sqrt{v}\right)^2}=\frac{v}{\left(1+\sqrt{v}\right)^2} ,$$

при этом $\dfrac{v}{\left(1+\sqrt{v}\right)^2}<\dfrac{1}{4}$, так как последнее неравенство равносильно неравенству $\dfrac{\sqrt{v}}{1+\sqrt{v}}<\dfrac{1}{2}$, т.е. $\sqrt{v}<1$.

5.13. (Неравенство Карлсона) Данное неравенство равносильно $27(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2 \ge 64(xy+yz+zx)^3$. Обозначим $a = xyz$, $b = xy + yz + zx$, $c = x + y + z$. Заметим, что поскольку $x, y, z \ge 0$ и справедливы неравенства $(x+y+z)^2 \ge 3(xy+yz+zx)$ (см. задачу 1.25) и $\frac{xy+yz+zx}{3} \ge \sqrt[3]{(xyz)^2}$ (неравенство Коши для трех переменных), то величины a, b и c связаны неравенствами

$$0 \le a \le \sqrt{\frac{b^3}{27}} \text{ и } 0 \le b \le \frac{c^2}{3}. \qquad (63)$$

Запишем исходное неравенство в переменных a, b и c. Нетрудно проверить, что

$$(x+y)(y+z)(z+x) = (x+y+z)(xy+yz+zx) - xyz.$$

Поэтому нам будет достаточно доказать неравенство

$$27(bc-a)^2 - 64b^3 \ge 0 \qquad (64)$$

для любых a, b и c, удовлетворяющих (63). Неравенство (64) равносильно неравенству

$$27a^2 - 54bca + \left(27b^2c^2 - 64b^3\right) \ge 0. \qquad (65)$$

Рассмотрим квадратичную функцию

$$f(t) = 27t^2 - 54bct + \left(27b^2c^2 - 64b^3\right).$$

Поскольку переменная a удовлетворяет неравенствам (63), нам достаточно будет показать, что эта функция на отрезке $I = \left[0; \sqrt{\frac{b^3}{27}}\right]$ принимает неотрицательные значения. Мы докажем, что точка минимума $t_{\min}$ функции f лежит правее отрезка I и что $f\left(\sqrt{\frac{b^3}{27}}\right) \ge 0$:

$$f\left(\sqrt{\frac{b^3}{27}}\right) = b^3 - 6b^2c\sqrt{3b} + 27b^2c^2 - 64b^3 \ge$$

$$\ge b^3 - 6b^2c^2 + 27b^2c^2 - 64b^3 = 21b^2\left(c^2 - 3b\right) \ge 0.$$

Здесь мы два раза воспользовались тем, что $c^2 \ge 3b$. Далее, имеем

$$t_{\min} = \frac{-(-54bc)}{2 \cdot 27} = bc \geq \sqrt{3b^3} \geq \sqrt{\frac{b^3}{27}}.$$

Из доказанного выше следует, что функция f убывает на отрезке I, а так как она неотрицательна на правом конце этого отрезка, то она неотрицательна на всем отрезке. Неравенство доказано.

Приведем еще одно доказательство неравенства Карлсона. Воспользуемся неравенством

$$9(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8(x+y+z)(xy+yz+zx)$$

для всех неотрицательных x, y и z (см. задачу 1.29). Возведя в квадрат обе части неравенства и поделив на 3, получим

$$27(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2 \geq \frac{64}{3}(x+y+z)^2(xy+yz+zx)^2.$$

Поэтому для доказательства неравенства Карлсона достаточно доказать неравенство $\frac{1}{3}(x+y+z)^2(xy+yz+zx)^2 \geq (xy+yz+ +zx)^3$, которое равносильно $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$ (см. задачу 1.25).

5.14*. Воспользуемся леммой Титу (12), получим

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+a^2} = \frac{a^4}{a\left(a^2+b^2\right)} + \frac{b^4}{b\left(b^2+c^2\right)} + \frac{c^4}{c\left(c^2+a^2\right)} \geq$$

$$\geq \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^3+b^3+c^3+ab^2+bc^2+ca^2}.$$

Теперь достаточно доказать, что

$$\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^3+b^3+c^3+ab^2+bc^2+ca^2} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

Это равносильно неравенству $2\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \geq \left(a^3+b^3+c^3+ +ab^2+bc^2+ca^2\right)(a+b+c)$. После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получим неравенство

$$a^4+b^4+c^4+3\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right) \geq \left(a^2bc+ab^2c+abc^2\right)+$$

$$+\left(a^3b+b^3c+c^3a\right)+2\left(ab^3+bc^3+ca^3\right).$$

Домножим обе его части на 2 и разобьем на два неравенства

$$a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geq 2\left(ab^3+bc^3+ca^3\right), \quad (66)$$

$$a^4+b^4+c^4+5\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right) \geq 2\left(a^2bc+ab^2c+abc^2\right)+$$
$$+\ 2\left(a^3b+b^3c+c^3a\right)+2\left(ab^3+bc^3+ca^3\right), \quad (67)$$

проверив которые для всех неотрицательных a, b, c, мы завершим доказательство исходного неравенства.

Неравенство (66) можно получить, сложив три верных неравенства $a^4+c^2a^2 \geq 2ca^3$, $b^4+a^2b^2 \geq 2ab^3$ и $c^4+b^2c^2 \geq 2bc^3$, которые в свою очередь следуют из неравенства Коши для двух переменных. Докажем неравенство (67). Оно является симметричным и однородным порядка 4. Если все переменные равны нулю, то это неравенство реализуется в форме равенства. Пусть c – не равная нулю переменная. Поделив обе части неравенства на c^4 и положив $x=\frac{a}{c}$, $y=\frac{b}{c}$, получим неравенство

$$x^4+y^4+1+5\left(x^2y^2+y^2+x^2\right) \geq 2\left(x^2y+xy^2+xy\right)+$$
$$+\ 2\left(x^3y+y^3+x\right)+2\left(xy^3+y+x^3\right),$$

доказав которое для всех $x, y \geq 0$, мы завершим решение задачи. Сделаем симметрическую замену переменных $u=x+y$, $v=xy$, причем $v \in \left[0; \frac{u^2}{4}\right]$, $u \geq 0$. Поскольку $x^2+y^2=u^2-2v$, $x^3+y^3=u\left(u^2-3v\right)$, $x^4+y^4=u^4-4u^2v+2v^2$, то приходим к неравенству $11v^2+\left(-6u^2+4u-12\right)v+\left(u^4-2u^3+5u^2-2u+1\right) \geq$ ≥ 0. Рассмотрим функцию

$$f(v)=11v^2+\left(-6u^2+4u-12\right)v+\left(u^4-2u^3+5u^2-2u+1\right),$$

квадратичную относительно переменной v и определенную на промежутке $\left[0; \frac{u^2}{4}\right]$, где u неотрицательно. На правом конце этого промежутка она принимает неотрицательное значение:

$$f\left(\frac{u^2}{4}\right)=\frac{3}{16}u^4-u^3+2u^2-2u+1=\frac{(u-2)^2\left(3u^2-4u+4\right)}{16} \geq 0.$$

Докажем теперь, что точка минимума $v_{\min}$ функции $f(v)$ лежит правее промежутка $\left[0; \frac{u^2}{4}\right]$, из чего будет следовать, что функция $f(v)$ убывает на этом отрезке, а значит (с учетом последнего неравенства), она неотрицательна на всем отрезке. Поскольку $v_{\min} = \frac{-\left(-6u^2 + 4u - 12\right)}{22} = \frac{3u^2 - 2u + 6}{11}$, то нам достаточно будет доказать неравенство $\frac{3u^2 - 2u + 6}{11} \geq \frac{u^2}{4}$, а это равносильно верному неравенству $u^2 - 8u + 24 \geq 0$. Доказательство завершено.

5.15*. Необходимость очевидна, докажем достаточность. Пусть для $F(x, y, z)$ выполнены неравенства из условия:

$$F(1,1,1) \geq 0,\ F(1,1,0) \geq 0,\ F(1,0,0) \geq 0. \qquad (68)$$

Нетрудно показать, что этот многочлен имеет вид

$$F(x, y, z) = A\left(x^3 + y^3 + z^3\right) + \\ + B\left(x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2\right) + Cxyz, \qquad (69)$$

где A, B, C – константы. Положим $\alpha = F(1, 0, 0)$, $\beta = F(1, 1, 0)$, $\gamma = F(1, 1, 1)$. Из неравенств (68) имеем, что $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$. Подставляя в формулу (69) вместо (x, y, z) наборы $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$, получаем $\alpha = A$, $\beta = 2A + 2B$, $\gamma = 3A + 6B + C$. Решая систему, составленную из указанных уравнений, относительно переменных A, B и C, получаем $A = \alpha$, $B = -\alpha + \frac{\beta}{2}$, $C = 3\alpha - 3\beta + \gamma$. Тогда

$$F(x, y, z) = \alpha\left(x^3 + y^3 + z^3\right) + \\ + \left(-\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\left(x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2\right) + \\ + (3\alpha - 3\beta + \gamma)xyz = \alpha P(x, y, z) + \frac{\beta}{2}Q(x, y, z) + \gamma xyz,$$

где

$$P(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - \\ -\left(x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2\right) + 3xyz,$$

$$Q(x, y, z) = x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2 - 6xyz.$$

Докажем, что $P(x, y, z) \geq 0$ и $Q(x, y, z) \geq 0$. Последнее неравенство равносильно неравенству

$$\frac{x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2}{6} \geq xyz,$$

которое следует из неравенства Коши для набора из шести переменных $x^2y, xy^2, y^2z, yz^2, z^2x, zx^2$. Неравенство

$$x^3 + y^3 + z^3 - \left(x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2\right) + 3xyz \geq 0.$$

верно (см. задачу 5.8). Поскольку $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ и $P(x, y, z) \geq 0$, $Q(x, y, z) \geq 0$ и $xyz \geq 0$ при неотрицательных x, y, z, то $F(x, y, z) = \alpha P(x, y, z) + \frac{\beta}{2} Q(x, y, z) + \gamma xyz \geq 0$. Утверждение доказано.

Глава 6. Циклические и круговые неравенства

6.2. Данное неравенство является круговым. Представим первое слагаемое правой части неравенства в виде

$$a^8 b = \left(\frac{a^{10}}{c}\right)^x \left(\frac{b^{10}}{a}\right)^y \left(\frac{c^{10}}{b}\right)^z. \tag{70}$$

Последнее равенство перепишем как $a^8 b^1 c^0 = a^{10x-y} \cdot b^{10y-z} \times$ $\times\, c^{10z-x}$. Приравнивая показатели степеней переменных a, b, c, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} 10x - y = 8, \\ 10y - z = 1, \\ 10z - x = 0, \end{cases} \tag{71}$$

решая которую, получаем $x = \frac{30}{37}$, $y = \frac{4}{37}$, $z = \frac{3}{37}$. Из равенства (70) и неравенства (27) следуют неравенства

$$a^8 b \leq \frac{30}{37} \cdot \frac{a^{10}}{c} + \frac{4}{37} \cdot \frac{b^{10}}{a} + \frac{3}{37} \cdot \frac{c^{10}}{b},$$

$$b^8 c \leq \frac{3}{37} \cdot \frac{a^{10}}{c} + \frac{30}{37} \cdot \frac{b^{10}}{a} + \frac{4}{37} \cdot \frac{c^{10}}{b},$$

$$c^8 a \leq \frac{4}{37} \cdot \frac{a^{10}}{c} + \frac{3}{37} \cdot \frac{b^{10}}{a} + \frac{30}{37} \cdot \frac{c^{10}}{b},$$

сложив которые, получим исходное неравенство.

6.3. Данное неравенство является круговым. Представим первое слагаемое правой части неравенства в виде

$$xy = \left(\frac{x^2y}{z}\right)^a \left(\frac{y^2z}{x}\right)^b \left(\frac{z^2x}{y}\right)^c . \tag{72}$$

Последнее равенство перепишем как

$$x^1y^1z^0 = x^{2a-b+c} \cdot y^{a+2b-c} \cdot z^{-a+b+2c} .$$

Приравнивая показатели степеней переменных x, y, z, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} 2a - b + c = 1, \\ a + 2b - c = 1, \\ -a + b + 2c = 0, \end{cases} \tag{73}$$

решая которую, получаем $a = \frac{4}{7}$, $b = \frac{2}{7}$, $c = \frac{1}{7}$. Из равенства (72) и неравенства (27) следуют неравенства

$$xy \le \frac{4}{7} \cdot \frac{x^2y}{z} + \frac{2}{7} \cdot \frac{y^2z}{x} + \frac{1}{7} \cdot \frac{z^2x}{y} ,$$

$$yz \le \frac{1}{7} \cdot \frac{x^2y}{z} + \frac{4}{7} \cdot \frac{y^2z}{x} + \frac{2}{7} \cdot \frac{z^2x}{y} ,$$

$$zx \le \frac{2}{7} \cdot \frac{x^2y}{z} + \frac{1}{7} \cdot \frac{y^2z}{x} + \frac{4}{7} \cdot \frac{z^2x}{y} ,$$

сложив которые, получим исходное неравенство.

6.4. Данное неравенство является круговым. Представим первое слагаемое правой части неравенства в виде

$$\frac{x}{y} = \left(\frac{x^2}{yz}\right)^a \left(\frac{y^2}{zx}\right)^b \left(\frac{z^2}{xy}\right)^c . \tag{74}$$

Последнее равенство перепишем как

$$x^1y^{-1}z^0 = x^{2a-b-c} \cdot y^{-a+2b-c} \cdot z^{-a-b+2c} .$$

Приравнивая показатели степеней переменных x, y, z, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2a - b - c = 1, \\ -a + 2b - c = -1, \\ -a - b + 2c = 0. \end{cases} \tag{75}$$

Эта система имеет бесконечное множество решений: $a = \frac{1}{3} + c$,

$b = -\frac{1}{3} + c$, где $c \in \mathbb{R}$. Так как для того, чтобы можно было применить неравенство (27), необходимо, чтобы было $a + b + c = 1$, то положим $c = \frac{1}{3}$, откуда $a = \frac{2}{3}$, $b = 0$. Из равенства (74) и неравенства (27) следуют неравенства

$$\frac{x}{y} \le \frac{2}{3} \cdot \frac{x^2}{yz} + 0 \cdot \frac{y^2}{zx} + \frac{1}{3} \cdot \frac{z^2}{xy},$$

$$\frac{y}{z} \le \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{yz} + \frac{2}{3} \cdot \frac{y^2}{zx} + 0 \cdot \frac{z^2}{xy},$$

$$\frac{z}{x} \le 0 \cdot \frac{x^2}{yz} + \frac{1}{3} \cdot \frac{y^2}{zx} + \frac{2}{3} \cdot \frac{z^2}{xy},$$

сложив которые, получим исходное неравенство.

6.5. Данное неравенство является круговым. Представим первое слагаемое правой части неравенства в виде

$$x = \left(\frac{x^2}{y}\right)^a \left(\frac{y^2}{z}\right)^b \left(\frac{z^2}{x}\right)^c. \tag{76}$$

Последнее равенство перепишем как $x^1 y^0 z^0 = x^{2a-c} \cdot y^{-a+2b} \times z^{-b+2c}$. Приравнивая показатели степеней переменных x, y, z, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} 2a - c = 1, \\ -a + 2b = 0, \\ -b + 2c = 0, \end{cases} \tag{77}$$

решая которую, получаем $a = \frac{4}{7}$, $b = \frac{2}{7}$, $c = \frac{1}{7}$. Из равенства (76) и неравенства (27) следуют неравенства

$$x \le \frac{4}{7} \cdot \frac{x^2}{y} + \frac{2}{7} \cdot \frac{y^2}{z} + \frac{1}{7} \cdot \frac{z^2}{x},$$

$$y \le \frac{1}{7} \cdot \frac{x^2}{y} + \frac{4}{7} \cdot \frac{y^2}{z} + \frac{2}{7} \cdot \frac{z^2}{x},$$

$$z \le \frac{2}{7} \cdot \frac{x^2}{y} + \frac{1}{7} \cdot \frac{y^2}{z} + \frac{4}{7} \cdot \frac{z^2}{x},$$

сложив которые, получим исходное неравенство.

6.6. Данное неравенство является круговым. Представим первое слагаемое правой части неравенства в виде

$$\frac{x}{y}=\left(\frac{x^2}{y^2}\right)^a\left(\frac{y^2}{z^2}\right)^b\left(\frac{z^2}{x^2}\right)^c. \qquad (78)$$

Последнее равенство запишем как $x^1y^{-1}z^0 = x^{2a-2c}\cdot y^{2b-2a}\cdot z^{2c-2b}$. Приравняем показатели степеней переменных x, y, z и добавим условие $a+b+c=1$ для того, чтобы можно было применить неравенство (27). Получим систему уравнений

$$\begin{cases}2a-2c=1,\\ 2b-2a=-1,\\ 2c-2b=0,\\ a+b+c=1.\end{cases}$$

Решая ее, находим $a=\frac{2}{3}$, $b=c=\frac{1}{6}$. Из равенства (78) и неравенства (27) имеем неравенства

$$\frac{x}{y}\le\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{y^2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{y^2}{z^2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{z^2}{x^2},$$

$$\frac{y}{z}\le\frac{1}{6}\cdot\frac{x^2}{y^2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{y^2}{z^2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{z^2}{x^2},$$

$$\frac{z}{x}\le\frac{1}{6}\cdot\frac{x^2}{y^2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{y^2}{z^2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{z^2}{x^2},$$

сложив которые, получим исходное неравенство.

6.7. Докажем, что $(1+x_1x_2)^2\le\left(1+x_1^2\right)\left(1+x_2^2\right)$. После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получим верное неравенство $x_1^2+x_2^2\ge 2x_1x_2$, которое получается из неравенства Коши для двух переменных x_1^2, x_2^2. Аналогично получаем

$$(1+x_2x_3)^2\le\left(1+x_2^2\right)\left(1+x_3^2\right),\ldots,(1+x_{n-1}x_n)^2\le\left(1+x_{n-1}^2\right)\left(1+x_n^2\right),$$
$$(1+x_nx_1)^2\le\left(1+x_n^2\right)\left(1+x_1^2\right).$$

Перемножив все эти неравенства, после извлечения корня из обеих частей получившегося неравенства получим исходное.

6.8*. Докажем неравенство

$$\left(1+\frac{a_i^2}{a_{i+1}}\right)(1+a_{i+1})\ge(1+a_i)^2. \qquad (79)$$

После раскрытия скобок получим $1 + a_{i+1} + \frac{a_i^2}{a_{i+1}} + a_i^2 \geq 1 + 2a_i + a_i^2$, что равносильно неравенству $a_{i+1} + \frac{a_i^2}{a_{i+1}} \geq 2a_i$. Последнее неравенство следует из неравенства Коши для двух переменных a_{i+1} и $\frac{a_i^2}{a_{i+1}}$. Перемножим неравенства (79) для $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ (полагаем $a_{n+1} = a_1$). Получим

$$\left(1 + \frac{a_1^2}{a_2}\right)\left(1 + \frac{a_2^2}{a_3}\right)\ldots\left(1 + \frac{a_n^2}{a_1}\right)(1 + a_1)\ldots(1 + a_n) \geq$$
$$\geq (1 + a_1)^2 \ldots (1 + a_n)^2 .$$

Разделив обе части неравенства на $(1 + a_1)\ldots(1 + a_n)$, получим требуемое неравенство.

6.9*. Воспользуемся леммой Титу (12). Получим

$$\frac{x_1}{x_2 + x_n} + \frac{x_2}{x_3 + x_1} + \ldots + \frac{x_n}{x_1 + x_{n-1}} = \frac{x_1^2}{x_1(x_2 + x_n)} +$$
$$+ \frac{x_2^2}{x_2(x_3 + x_1)} + \ldots + \frac{x_n^2}{x_n(x_1 + x_{n-1})} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2}{2(x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_nx_1)} .$$

Теперь достаточно доказать неравенство $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 \geq$ $\geq 4(x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_nx_1)$. Его доказательство приведено в решении задачи 4.17.

6.10*. Пусть $x_{i_1} = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. В силу цикличности неравенства без ограничения общности можно считать, что $i_1 = 1$. Пусть x_{i_2} − наибольшее из двух следующих за x_{i_1} чисел (при этом мы считаем, что за x_1 следует x_2, за x_2 следует x_3 и т.д., за x_{n-1} следует x_n, за x_n следует x_1); x_{i_3} − наибольшее из двух следующих за x_{i_2} чисел и т.д. Получаем возрастающую последовательность $\{i_j\}$ натуральных чисел, не превосходящих n. Строим ее до тех пор, пока очередной член i_k этой последовательности не станет равен $n - 1$ или n. Легко заметить, что $k \geq \frac{n}{2}$. Это следует из того, что $i_2 \leq 3, i_3 \leq 5, \ldots, i_k \leq 2k - 1$, т.е. $n - 1 \leq 2k - 1$ или $n \leq 2k - 1$. Для каждого номера $j \leq k - 1$ имеем неравенство

$$\frac{x_{i_j}}{x_{i_j+1} + x_{i_j+2}} \geq \frac{x_{i_j}}{2x_{i_j+1}} .$$

Кроме того,

$$\frac{x_{i_k}}{x_{i_k+1} + x_{i_k+2}} \geq \frac{x_{i_k}}{2x_1}$$

(здесь мы считаем, что $x_{n+1} = x_1$ и $x_{n+2} = x_2$). Поэтому

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_4} + \ldots + \frac{x_n}{x_1 + x_2} \geq \frac{x_{i_1}}{x_{i_1+1} + x_{i_1+2}} + \frac{x_{i_2}}{x_{i_2+1} + x_{i_2+2}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{x_{i_k}}{x_{i_k+1} + x_{i_k+2}} \geq \frac{x_{i_1}}{2x_{i_2}} + \frac{x_{i_2}}{2x_{i_3}} + \ldots + \frac{x_{i_k}}{2x_{i_1}} \geq \frac{k}{2} \geq \frac{n}{4}.$$

То, что последняя сумма не меньше $\frac{k}{2}$, следует из неравенства Коши для k переменных.

6.11*. Представим первое слагаемое правой части неравенства в виде

$$a = \left(\frac{a}{b}\right)^x \left(\frac{b}{c}\right)^y \left(\frac{c}{a}\right)^z, \tag{80}$$

причем потребуем, чтобы для чисел x, y, z выполнялось условие $x + y + z = 1$. В этом случае можно будет воспользоваться неравенством (27). Умножим равенство (80) на верное равенство $1 = (abc)^k$, где k − некоторое число, получим $a^1b^0c^0 = a^{x-z+k} \times$ $\times\, b^{-x+y+k} \cdot c^{-y+z+k}$. Приравнивая показатели степеней переменных a, b, c и добавляя условие $x + y + z = 1$, имеем

$$\begin{cases} x - z + k = 1, \\ -x + y + k = 0, \\ -y + z + k = 0, \\ x + y + z = 1. \end{cases} \tag{81}$$

Сложив первые три уравнения, приходим к равенству $3k = 1$, откуда $k = \frac{1}{3}$. Решая систему из последних трех уравнений, находим $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{3}$, $z = 0$. Из равенства (80) и неравенства (27) следуют неравенства

$$a \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{b} + \frac{1}{3} \cdot \frac{b}{c} + 0 \cdot \frac{c}{a},$$

$$b \leq 0 \cdot \frac{a}{b} + \frac{2}{3} \cdot \frac{b}{c} + \frac{1}{3} \cdot \frac{c}{a},$$

$$c \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{b} + 0 \cdot \frac{b}{c} + \frac{2}{3} \cdot \frac{c}{a},$$

сложив которые, получим исходное неравенство.

7.7. Получаем из неравенства задачи 7.1 (см. замечание к этой задаче) подстановкой $x = \sqrt{a}$, $y = \sqrt{b}$.

7.8. Перенесем единицу в левую часть и возведем обе части неравенства в квадрат, получим равносильное

$$a + b + 2 + 2\sqrt{a+b+1} \le a + b + 2 + 2\sqrt{a+1} \cdot \sqrt{b+1},$$

т.е. $\sqrt{a+b+1} \le \sqrt{a+1} \cdot \sqrt{b+1}$. Снова возведя в квадрат, получим равносильное верное неравенство $a + b + 1 \le ab + a + b + 1$.

7.9. Запишем неравенство в виде $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{c}}{\sqrt{b+d}} + \frac{\sqrt{b}+\sqrt{d}}{\sqrt{a+c}} > 2$ и заметим, что поскольку $\sqrt{b} + \sqrt{d} > \sqrt{b+d}$ и $\sqrt{a} + \sqrt{c} > \sqrt{a+c}$ (см. задачу 7.7), то

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{c}}{\sqrt{b+d}} + \frac{\sqrt{b}+\sqrt{d}}{\sqrt{a+c}} > \frac{\sqrt{a}+\sqrt{c}}{\sqrt{b+d}} + \frac{\sqrt{b+d}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}} \ge 2$$

(использовано неравенство $t + \frac{1}{t} \ge 2$ при $t > 0$).

7.10. Перейдем к равносильному неравенству

$$x\left(\sqrt{y} + \sqrt{z}\right) + y\left(\sqrt{z} + \sqrt{x}\right) + z\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) \ge$$
$$\ge x\sqrt{y+z} + y\sqrt{z+x} + z\sqrt{x+y},$$

раскрыв скобки в левой части и перегруппировав слагаемые. Поскольку $\sqrt{a} + \sqrt{b} \ge \sqrt{a+b}$ (см. задачу 7.7), то $x\left(\sqrt{y} + \sqrt{z}\right) \ge$ $\ge x\sqrt{y+z}$, $y\left(\sqrt{z} + \sqrt{x}\right) \ge y\sqrt{z+x}$ и $z\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) \ge z\sqrt{x+y}$. Сложив эти неравенства почленно, получим исходное неравенство.

7.11. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1 + x \ge \left(1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8}\right)^2, \\ 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} \ge 0, \\ x \ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} < 0, \\ x \ge 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Имеем

$$1+x \geq \left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}\right)^2 \Leftrightarrow 1+x \geq 1+\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{64}+x-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3}{64}(x-8) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [0;8].$$

Решая неравенство $1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8} \geq 0$, находим $x \in \left[2-2\sqrt{3};2+ +2\sqrt{3}\right]$. Первая система совокупности имеет решение $x \in \left[0;2+2\sqrt{3}\right]$. Аналогично можно показать, что $x \in \left(2+2\sqrt{3};+\infty\right)$ есть решение второй системы. Следовательно, решением совокупности является множество $[0;+\infty)$.

7.12. Докажем сначала неравенство

$$\sqrt{(x+y)(y+z)} \geq \sqrt{xy}+\sqrt{yz}\,. \qquad (82)$$

Возведя в квадрат обе части этого неравенства и перенеся все слагаемые в левую часть, получим равносильное неравенство $xz+y^2-2y\sqrt{xz} \geq 0$ или $\left(\sqrt{xz}-y\right)^2 \geq 0$, которое, очевидно, верно. Аналогично доказываются неравенства $\sqrt{(y+z)(z+x)} \geq \geq \sqrt{yz}+\sqrt{zx}$ и $\sqrt{(z+x)(x+y)} \geq \sqrt{zx}+\sqrt{xy}$, сложив которые с неравенством (82), получаем исходное неравенство.

7.13. *Первый способ.* Воспользовавшись леммой Титу (12) и уже доказанным неравенством из задачи 7.12, имеем

$$\frac{(x+y)(y+z)}{\sqrt{zx}}+\frac{(y+z)(z+x)}{\sqrt{xy}}+\frac{(z+x)(x+y)}{\sqrt{yz}} \geq$$

$$\geq \frac{\left(\sqrt{(x+y)(y+z)}+\sqrt{(y+z)(z+x)}+\sqrt{(z+x)(x+y)}\right)^2}{\sqrt{zx}+\sqrt{xy}+\sqrt{yz}} \geq$$

$$\geq 4\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right).$$

Второй способ. Раскрыв скобки в числителе каждой дроби, представив левую часть неравенства в виде суммы 12 слагаемых и сгруппировав эти слагаемые, получим равносильное неравенство

$$\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)+\left(\frac{xy}{\sqrt{zx}}+\frac{zx}{\sqrt{xy}}+\frac{x^2}{\sqrt{yz}}\right)+$$

$$+\left(\frac{yz}{\sqrt{zx}}+\frac{z^2}{\sqrt{xy}}+\frac{zx}{\sqrt{yz}}\right)+\left(\frac{y^2}{\sqrt{zx}}+\frac{yz}{\sqrt{xy}}+\frac{xy}{\sqrt{yz}}\right)\geq$$

$$\geq 4\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right),$$

или

$$\left(\frac{xy}{\sqrt{zx}}+\frac{zx}{\sqrt{xy}}+\frac{x^2}{\sqrt{yz}}\right)+\left(\frac{yz}{\sqrt{zx}}+\frac{z^2}{\sqrt{xy}}+\frac{zx}{\sqrt{yz}}\right)+$$

$$+\left(\frac{y^2}{\sqrt{zx}}+\frac{yz}{\sqrt{xy}}+\frac{xy}{\sqrt{yz}}\right)\geq 3\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right).$$

Применив неравенство Коши для трех переменных, получим

$$\frac{xy}{\sqrt{zx}}+\frac{zx}{\sqrt{xy}}+\frac{x^2}{\sqrt{yz}}\geq 3x,\ \ \frac{yz}{\sqrt{zx}}+\frac{z^2}{\sqrt{xy}}+\frac{zx}{\sqrt{yz}}\geq 3z,$$

$$\frac{y^2}{\sqrt{zx}}+\frac{yz}{\sqrt{xy}}+\frac{xy}{\sqrt{yz}}\geq 3y.$$

Теперь достаточно доказать неравенство $x+y+z\geq\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+$ $+\sqrt{zx}$, которое можно получить сложением трех неравенств $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$, $\frac{y+z}{2}\geq\sqrt{yz}$ и $\frac{z+x}{2}\geq\sqrt{zx}$.

7.14. Возведем в квадрат обе части данного неравенства. Отбросив равные слагаемые в левой и правой частях и поделив на 2, получим неравенство

$$\sqrt{(x+y)(y+z)}+\sqrt{(y+z)(z+x)}+\sqrt{(z+x)(x+y)}\geq$$

$$\geq 2\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right),$$

которое нами уже доказано (см. задачу 7.12).

7.15*. Возведем неравенство в квадрат, получим

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{2}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{1+y^2}\leq\frac{4}{1+xy}.$$

Разобьем это неравенство на два и докажем, что

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}\leq\frac{2}{1+xy}\ \text{ и }\ \frac{2}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}}\leq\frac{2}{1+xy}.$$

Первое из этих неравенств уже доказано (см. задачу 1.2).

Докажем второе. Из неравенства Коши получим

$$\frac{2}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}}=2\sqrt{\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1}{1+y^2}}\le 2\cdot\frac{\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+y^2}}{2}\le\frac{2}{1+xy}.$$

Для завершения доказательства осталось сложить полученные неравенства.

7.16*. Данное неравенство эквивалентно

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx-2x\sqrt{y^2+z^2}-2y\sqrt{z^2+x^2}-$$
$$-2z\sqrt{x^2+y^2}\ge 0.$$

Если $x=y=z=0$, то неравенство верно. Пусть z – наибольшая (не равная нулю) переменная. Поделив обе части неравенства на z^2 и сделав замену переменных $a=\frac{x}{z}$, $b=\frac{y}{z}$, мы придем к неравенству

$$a^2+b^2+1+2ab+2a+2b-2a\sqrt{b^2+1}-2b\sqrt{a^2+1}-2\sqrt{a^2+b^2}\ge 0$$

или к равносильному

$$\left(\sqrt{a^2+b^2}-1\right)^2+2\left(ab+a+b-a\sqrt{b^2+1}-b\sqrt{a^2+1}\right)\ge 0,$$

доказав которое для любых $a,b\in[0;1]$, получим требуемый результат. Поскольку слагаемое $\left(\sqrt{a^2+b^2}-1\right)^2$ неотрицательно и

$$ab+a+b-a\sqrt{b^2+1}-b\sqrt{a^2+1}\ge 0$$

для любых $a,b\in[0;1]$ (см. задачу 7.5), то исходное неравенство тоже верно.

7.17*. Сделаем замену переменных $a=\sqrt{x}$, $b=\sqrt{y}$, $c=\sqrt{z}$ и умножим числитель и знаменатель первой дроби на a, второй дроби – на b, третьей – на c. Тогда неравенство примет вид

$$\frac{a^2}{a\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b^2}{b\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{c^2}{c\sqrt{c^2+a^2}}>1,\ a,b,c>0. \qquad (83)$$

Воспользовавшись леммой Титу (12), получим

$$\frac{a^2}{a\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b^2}{b\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{c^2}{c\sqrt{c^2+a^2}}\ge$$
$$\ge\frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt{a^2+b^2}+b\sqrt{b^2+c^2}+c\sqrt{c^2+a^2}}.$$

Для завершения доказательства неравенства (83) достаточно проверить неравенство

$$\frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt{a^2+b^2}+b\sqrt{b^2+c^2}+c\sqrt{c^2+a^2}}>1$$

или равносильное ему

$$(a+b+c)^2-\left(a\sqrt{a^2+b^2}+b\sqrt{b^2+c^2}+c\sqrt{c^2+a^2}\right)>0\,.$$

Оно верно в силу того, что

$$(a+b+c)^2-\left(a\sqrt{a^2+b^2}+b\sqrt{b^2+c^2}+c\sqrt{c^2+a^2}\right)=a^2+b^2+$$

$$+c^2+2ab+2bc+2ca-\left(a\sqrt{a^2+b^2}+b\sqrt{b^2+c^2}+c\sqrt{c^2+a^2}\right)=$$

$$=a\left(a+b-\sqrt{a^2+b^2}\right)+b\left(b+c-\sqrt{b^2+c^2}\right)+$$

$$+c\left(c+a-\sqrt{c^2+a^2}\right)+ab+bc+ca>0\,,$$

поскольку $a+b>\sqrt{a^2+b^2}$, $b+c>\sqrt{b^2+c^2}$, $c+a>\sqrt{c^2+a^2}$ для всех $a,\ b,\ c\ >\ 0$ (см. задачу 7.1).

7.18*. Воспользовавшись леммой Титу (12), получим

$$\sqrt{\frac{x^3}{y+z}}+\sqrt{\frac{y^3}{z+x}}+\sqrt{\frac{z^3}{x+y}}=\frac{x^2}{\sqrt{x(y+z)}}+\frac{y^2}{\sqrt{y(z+x)}}+$$

$$+\frac{z^2}{\sqrt{z(x+y)}}\ge\frac{(x+y+z)^2}{\sqrt{x(y+z)}+\sqrt{y(z+x)}+\sqrt{z(x+y)}}\,.$$

Теперь достаточно доказать, что

$$\frac{(x+y+z)^2}{\sqrt{x(y+z)}+\sqrt{y(z+x)}+\sqrt{z(x+y)}}\ge\frac{x+y+z}{\sqrt{2}}\,,$$

т.е. что $\sqrt{2}(x+y+z)\ge\sqrt{x(y+z)}+\sqrt{y(z+x)}+\sqrt{z(x+y)}$. Возведя это неравенство в квадрат, получим равносильное неравенство

$$2\left(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx\right)\ge$$

$$\ge 2(xy+yz+zx)+2\sqrt{xy(y+z)(z+x)}+$$

$$+2\sqrt{yz(z+x)(x+y)}+2\sqrt{zx(x+y)(y+z)}\,,$$

или

$$x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx\ge$$
$$\ge\sqrt{xy(y+z)(z+x)}+\sqrt{yz(z+x)(x+y)}+\sqrt{zx(x+y)(y+z)}\,. \tag{84}$$

Докажем неравенство

$$x^2+y^2+yz+zx\ge 2\sqrt{xy(y+z)(z+x)}\,. \tag{85}$$

Возведя в квадрат обе части неравенства, получим

$$x^4+y^4+y^2z^2+z^2x^2+2x^2y^2+2x^2yz+2x^3z+2y^3z+$$
$$+2xy^2z+2xyz^2\ge 4x^2y^2+4x^2yz+4xy^2z+4xyz^2$$

и, далее,

$$x^4+y^4+y^2z^2+z^2x^2-2x^2y^2-$$
$$-2x^2yz+2x^3z+2y^3z-2xy^2z-2xyz^2\ge 0\,.$$

Свернув левую часть неравенства в полный квадрат, получим верное неравенство $\left(x^2-y^2-yz+zx\right)^2\ge 0$.

Аналогично приходим к неравенствам $y^2+z^2+zx+xy\ge$ $\ge 2\sqrt{yz(z+x)(x+y)}$ и $z^2+x^2+xy+yz\ge 2\sqrt{zx(x+y)(y+z)}$, сложив которые с неравенством (85), получим неравенство, равносильное (84).

7.19*. Возведя в квадрат обе части неравенства, перейдем к равносильному неравенству

$$x^2+y^2\le\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(x^2+y^2+2+2xy+2x\sqrt{2}+2y\sqrt{2}\right).$$

Сделаем замену переменных $u=x+y$, $v=xy$, причем новые переменные должны удовлетворять условиям $0\le u\le 2$, $0\le v\le\dfrac{u^2}{4}$, а также $v\ge u-1$ (последнее неравенство следует из того, что $x,y\in[0;1]$). Легко проверить, что эти условия равносильны тому, что $v\in[0;1]$ и $u\in\left[2\sqrt{v};v+1\right]$. Тогда достаточно доказать неравенство $u^2-2v\le\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(u^2+2\sqrt{2}u+2\right)$ или равносильное ему

$$u^2\left(2\sqrt{2}-2\right)+2\left(4-3\sqrt{2}\right)u-2\left(v+3-2\sqrt{2}\right)\le 0\,.$$

Рассмотрим функцию

$$F(u)=u^2\left(2\sqrt{2}-2\right)+2\left(4-3\sqrt{2}\right)u-2\left(v+3-2\sqrt{2}\right),$$

где $u \in \left[2\sqrt{v}; v+1\right]$ и $v \in [0;1]$. Так как эта функция квадратичная и старший коэффициент положителен, то эта функция не имеет точек максимума. Поэтому достаточно доказать, что она принимает неположительные значения на концах отрезка $\left[2\sqrt{v}; v+1\right]$. Имеем

$$F\left(2\sqrt{v}\right) = 4v\left(2\sqrt{2}-2\right) + 4\left(4-3\sqrt{2}\right)\sqrt{v} - 2v - 2\left(3-2\sqrt{2}\right) =$$

$$= 2\left(4\sqrt{2}-5\right)v + 4\left(4-3\sqrt{2}\right)\sqrt{v} - 2\left(3-2\sqrt{2}\right).$$

Обозначим $t = \sqrt{v}$. Положим

$$g(t) = 2\left(4\sqrt{2}-5\right)t^2 + 4\left(4-3\sqrt{2}\right)t - 2\left(3-2\sqrt{2}\right).$$

Достаточно доказать, что $g(t) \le 0$ при $t \in [0;1]$. Рассуждая так же, как и выше, приходим к выводу, что нам достаточно проверить, что $g(0) \le 0$ и $g(1) \le 0$. Но $g(0) = -2\left(3-2\sqrt{2}\right) < 0$ и $g(1) = 0$, следовательно, $F\left(2\sqrt{v}\right) \le 0$. Далее, имеем

$$F(v+1) = 2\left(v^2+2v+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right) + 2\left(4-3\sqrt{2}\right)(v+1) -$$

$$- 2\left(v+3-2\sqrt{2}\right) = 2\left(\sqrt{2}-1\right)v(v-1) \le 0,$$

так как $v \in [0;1]$, следовательно, $F(u) \le 0$ для всех $u \in \left[2\sqrt{v}; v+1\right]$, $v \in [0;1]$.

7.20*. Если все переменные равны нулю, то неравенство верно. Положим

$$f(a,b,c,d,e) = a\sqrt{e^2+b^2} + b\sqrt{a^2+c^2} + c\sqrt{b^2+d^2} +$$

$$+ d\sqrt{c^2+e^2} + e\sqrt{d^2+a^2}.$$

Без ограничения общности можно считать, что b – наибольшая из всех переменных. Покажем, что при переходе от переменных a, b, c, d, e к переменным a', b', c', d', e', где $a' = a$, $b' = b$, $c' = c + e$, $d' = d$, $e' = 0$, значение функции f не уменьшится, т.е. $f(a,b,c,d,e) \le f(a',b',c',d',e')$. Поскольку

$$f(a',b',c',d',e') = ab + b\sqrt{a^2+(c+e)^2} + (c+e)\sqrt{b^2+d^2} + d(c+e),$$

нужно доказать, что

$$a\sqrt{e^2+b^2} + b\sqrt{a^2+c^2} + d\sqrt{c^2+e^2} + e\sqrt{d^2+a^2} \le$$

$$\le ab + b\sqrt{a^2+(c+e)^2} + e\sqrt{b^2+d^2} + d(c+e).$$

Так как $d\sqrt{c^2+e^2} \le d(c+e)$ и $e\sqrt{d^2+a^2} \le e\sqrt{b^2+d^2}$, то достаточно будет доказать, что $a\sqrt{e^2+b^2}+b\sqrt{a^2+c^2} \le ab + b\sqrt{a^2+(c+e)^2}$. Возведя в квадрат обе части неравенства, получим равносильное неравенство

$$a^2e^2+a^2b^2+a^2b^2+b^2c^2+2ab\sqrt{e^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+c^2} \le$$
$$\le a^2b^2+a^2b^2+b^2c^2+b^2e^2+2b^2ce+2ab^2\sqrt{a^2+(c+e)^2}.$$

После выполнения сокращений получим неравенство

$$a^2e^2+2ab\sqrt{e^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+c^2} \le b^2e^2+2b^2ce+2ab^2\sqrt{a^2+(c+e)^2}.$$

Так как $0 \le 2b^2ce$ и $a^2e^2 \le b^2e^2$, достаточно доказать неравенство

$$\sqrt{e^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+c^2} \le b\sqrt{a^2+(c+e)^2}.$$

Возведя его в квадрат, получим равносильное неравенство

$$a^2e^2+a^2b^2+e^2c^2+b^2c^2 \le a^2b^2+b^2c^2+b^2e^2+2b^2ce,$$

т.е.

$$a^2e^2+e^2c^2 \le b^2e^2+2b^2ce. \tag{86}$$

Поскольку $ec \le 2b^2$ (так как b – наибольшее число), то $e^2c^2 \le 2b^2ce$. Складывая это неравенство с верным неравенством $a^2e^2 \le b^2e^2$, получаем неравенство (86).

Итак, мы доказали, что $f(a,b,c,d,e) \le f(a',b',c',d',0)$, причем $a+b+c+d+e = a'+b'+c'+d'$. Аналогичным образом мы можем перейти к таким новым переменным a'', b'', c'', d'', e'', что

$$d''=0, \quad e''=0,$$

$$a''+b''+c''+d''+e'' = a'+b'+c'+d'+e' = a+b+c+d+e,$$

$$f(a,b,c,d,e) \le f(a',b',c',d',e') \le f(a'',b'',c'',d'',e''). \tag{87}$$

Действительно, возможны два случая.

а) Пусть $b' = \max\{a',b',c',d',e'\}$. Тогда

$$f(a',b',c',d',e') = f(c',b',a',e',d') \le$$
$$\le f(c',b',a'+d',e',0) = f(c',b',a'+d',0,0),$$

т.е. в (87) нужно положить $a''=c'$, $b''=b'$, $c''=a'+d'$.

б) Пусть $c' = \max\{a', b', c', d', e'\}$. Тогда

$$f(a', b', c', d', e') = f(b', c', d', e', a') \le$$

$$\le f(b', c', a' + d', e', 0) = f(b', c', a' + d', 0, 0),$$

т.е. в (87) нужно положить $a'' = b'$, $b'' = c'$, $c'' = a' + d'$.

Осталось доказать, что

$$f(a'', b'', c'', d'', e'') \le \frac{1}{2}(a'' + b'' + c'' + d'' + e'')^2,$$

т.е., учитывая, что $d'' = 0$ и $e'' = 0$, доказать неравенство

$$a''b'' + b''\sqrt{a''^2 + c''^2} + b''c'' \le \frac{1}{2}(a'' + b'' + c'')^2.$$

Обозначим $x = a''$, $y = b''$, $z = c''$. Раскрыв скобки в последнем неравенстве и умножив обе его части на 2, получим неравенство

$$2xy + 2y\sqrt{x^2 + z^2} + 2yz \le x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx,$$

что равносильно условию $\left((x^2 + z^2) - 2y\sqrt{x^2 + z^2} + y^2\right) + 2zx \ge 0$, т.е. $\left(\sqrt{x^2 + z^2} - y\right)^2 + 2zx \ge 0$. Последнее неравенство верно, следовательно, исходное неравенство доказано.

Глава 8. Использование транснеравенств

8.5. Рассмотрим две конечные последовательности $\left(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{b+c}}, \frac{1}{\sqrt{c+a}}, \frac{1}{\sqrt{a+b}}\right)$. Они одномонотонны, так как для положительных x, y, z условие $\sqrt{x} \ge \sqrt{y} \ge \sqrt{z}$ равносильно условию $\frac{1}{\sqrt{y+z}} \ge \frac{1}{\sqrt{z+x}} \ge \frac{1}{\sqrt{x+y}}$. Действительно,

$$\sqrt{x} \ge \sqrt{y} \ge \sqrt{z} \Leftrightarrow x \ge y \ge z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x + y + z) - x \le (x + y + z) - y \le (x + y + z) - z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y+z} \le \sqrt{z+x} \le \sqrt{x+y} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{y+z}} \ge \frac{1}{\sqrt{z+x}} \ge \frac{1}{\sqrt{x+y}}.$$

Применим к этим последовательностям транснеравенство (29).

Получим

$$\begin{bmatrix} \sqrt{a} & \sqrt{b} & \sqrt{c} \\ \dfrac{1}{\sqrt{b+c}} & \dfrac{1}{\sqrt{c+a}} & \dfrac{1}{\sqrt{a+b}} \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} \sqrt{a} & \sqrt{b} & \sqrt{c} \\ \dfrac{1}{\sqrt{a+b}} & \dfrac{1}{\sqrt{b+c}} & \dfrac{1}{\sqrt{c+a}} \end{bmatrix},$$

т.е. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b+c}} + \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{c+a}} + \dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{a+b}} \ge \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}} + \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{b+c}} + \dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{c+a}}$, откуда получаем исходное неравенство.

8.6. Рассмотрим две конечные последовательности $\left(a^3, b^3, c^3\right)$ и $\left(\dfrac{1}{bc}, \dfrac{1}{ca}, \dfrac{1}{ab}\right)$. Они одномонотонны, так как для положительных x, y, z условие $x^3 \ge y^3 \ge z^3$ равносильно условию $\dfrac{1}{yz} \ge \dfrac{1}{zx} \ge \dfrac{1}{xy}$. Действительно,

$$x^3 \ge y^3 \ge z^3 \Leftrightarrow x \ge y \ge z \Leftrightarrow \frac{x}{xyz} \ge \frac{y}{xyz} \ge \frac{z}{xyz} \Leftrightarrow \frac{1}{yz} \ge \frac{1}{zx} \ge \frac{1}{xy}.$$

Применим к этим последовательностям транснеравенство (29). Получим

$$\begin{bmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ \dfrac{1}{bc} & \dfrac{1}{ca} & \dfrac{1}{ab} \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ \dfrac{1}{ab} & \dfrac{1}{bc} & \dfrac{1}{ca} \end{bmatrix},$$

т.е.

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \ge \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}.$$

Аналогично доказывается неравенство $\dfrac{a^3}{bc} + \dfrac{b^3}{ca} + \dfrac{c^3}{ab} \ge \dfrac{a^2}{c} + \dfrac{b^2}{a} + \dfrac{c^2}{b}$. Сложив эти два неравенства и поделив обе части получившегося неравенства на 2, получим исходное.

8.7. Это неравенство может быть доказано с использованием однородности левой части (см. задачу 5.7). Теперь докажем его, используя свойства монотонных последовательностей. Рассмотрим две конечные последовательности $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\left(\dfrac{1}{s-a_1}, \dfrac{1}{s-a_2}, \ldots, \dfrac{1}{s-a_n}\right)$. Они одномонотонны. Применим к ним транснеравенство (29). Получим

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \dfrac{1}{s-a_1} & \dfrac{1}{s-a_2} & \dots & \dfrac{1}{s-a_n} \end{bmatrix} \ge$$

$$\ge \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-k+1} & a_{n-k+2} & \dots & a_n \\ \dfrac{1}{s-a_k} & \dfrac{1}{s-a_{k+1}} & \dots & \dfrac{1}{s-a_n} & \dfrac{1}{s-a_1} & \dots & \dfrac{1}{s-a_{k-1}} \end{bmatrix}$$

для $k = 2, \dots, n$. Сложив эти $n-1$ неравенств почленно и поделив обе части получившегося неравенства на $n-1$, получим требуемое неравенство.

8.8. Рассмотрим две конечные последовательности $\left(a^3, b^3, c^3\right)$ и $\left(\dfrac{1}{b^2+c^2}, \dfrac{1}{c^2+a^2}, \dfrac{1}{a^2+b^2}\right)$. Они одномонотонны, так как для положительных x, y, z выполнено

$$x^3 \le y^3 \le z^3 \Leftrightarrow x \le y \le z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2+z^2\right) - x^2 \ge \left(x^2+y^2+z^2\right) - y^2 \ge \left(x^2+y^2+z^2\right) - z^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2+z^2 \ge z^2+x^2 \ge x^2+y^2 \Leftrightarrow \frac{1}{y^2+z^2} \le \frac{1}{z^2+x^2} \le \frac{1}{x^2+y^2}.$$

Применим к этим последовательностям транснеравенство (29). Получим

$$\begin{bmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ \dfrac{1}{b^2+c^2} & \dfrac{1}{c^2+a^2} & \dfrac{1}{a^2+b^2} \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ \dfrac{1}{c^2+a^2} & \dfrac{1}{a^2+b^2} & \dfrac{1}{b^2+c^2} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ \dfrac{1}{b^2+c^2} & \dfrac{1}{c^2+a^2} & \dfrac{1}{a^2+b^2} \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ \dfrac{1}{a^2+b^2} & \dfrac{1}{b^2+c^2} & \dfrac{1}{c^2+a^2} \end{bmatrix},$$

т.е.

$$\frac{a^3}{b^2+c^2} + \frac{b^3}{c^2+a^2} + \frac{c^3}{a^2+b^2} \ge \frac{a^3}{c^2+a^2} + \frac{b^3}{a^2+b^2} + \frac{c^3}{b^2+c^2},$$

$$\frac{a^3}{b^2+c^2} + \frac{b^3}{c^2+a^2} + \frac{c^3}{a^2+b^2} \ge \frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+a^2}.$$

Сложив эти два неравенства, получим

$$2\left(\frac{a^3}{b^2+c^2}+\frac{b^3}{c^2+a^2}+\frac{c^3}{a^2+b^2}\right)\ge\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3+c^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3+a^3}{c^2+a^2}.$$

Так как $\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}\ge\frac{a+b}{2}$, $\frac{b^3+c^3}{b^2+c^2}\ge\frac{b+c}{2}$, $\frac{c^3+a^3}{c^2+a^2}\ge\frac{c+a}{2}$ (см. задачу (1.16), то

$$2\left(\frac{a^3}{b^2+c^2}+\frac{b^3}{c^2+a^2}+\frac{c^3}{a^2+b^2}\right)\ge\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}=a+b+c.$$

Поделив обе части последнего неравенства на 2, получим требуемое неравенство.

8.9. Рассмотрим конечные последовательности

$$A=\left(a^2,b^2,c^2\right)\text{ и }B=\left(a^3,b^3,c^3\right).$$

Можем считать, что $a\ge b\ge c>0$. Последовательности одномонотонны, поскольку $a^2\ge b^2\ge c^2$ и $a^3\ge b^3\ge c^3$. Применяя к этим двум последовательностям неравенство Чебышёва (см. задачу 8.3), получаем требуемое неравенство.

8.10. Докажем равносильное неравенство

$$\left(\left(b^2+c^2\right)+\left(c^2+a^2\right)+\left(a^2+b^2\right)\right)\left(\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2}\right)\ge$$
$$\ge 3(a+b+c).$$

Рассмотрим конечные последовательности

$$A=\left(b^2+c^2,c^2+a^2,a^2+b^2\right)\text{ и }B=\left(\frac{a}{b^2+c^2},\frac{b}{c^2+a^2},\frac{c}{a^2+b^2}\right).$$

Можем считать, что выполнено $a\ge b\ge c>0$. Последовательности разномонотонны, поскольку $b^2+c^2\le c^2+a^2\le a^2+b^2$ и $\frac{a}{b^2+c^2}\ge\frac{b}{c^2+a^2}\ge\frac{c}{a^2+b^2}$. Применяя к этим двум последовательностям неравенство Чебышёва (см. задачу 8.3), получаем требуемое неравенство.

8.11. Докажем равносильное неравенство

$$\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\left(a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\right)\le$$
$$\le 3\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Рассмотрим конечные последовательности

$$A=\left(\frac{1}{b+c},\frac{1}{c+a},\frac{1}{a+b}\right) \text{и } B=\left(a^2(b+c),b^2(c+a),c^2(a+b)\right).$$

Докажем, что они одномонотонны. Мы можем считать, что $a \ge b \ge c > 0$. Тогда $b+c \le c+a \le a+b$ и $\frac{1}{b+c} \ge \frac{1}{c+a} \ge \frac{1}{a+b}$. Покажем, что $a^2(b+c) \ge b^2(c+a) \ge c^2(a+b)$. Действительно, неравенство $a^2(b+c) \ge b^2(c+a)$ равносильно верному неравенству $ab(a-b)+c\left(a^2-b^2\right) \ge 0$, а неравенство $b^2(c+a) \ge c^2(a+b)$ – неравенству $bc(b-c)+a\left(b^2-c^2\right) \ge 0$.

Поскольку последовательности A и B одномонотонны, то, применяя к ним неравенство Чебышёва (см. задачу 8.3), получаем требуемое неравенство.

8.12. Докажем равносильное неравенство

$$\left(\frac{ab}{a+b}+\frac{ca}{c+a}+\frac{bc}{b+c}\right)\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{bc}\right) \ge 3\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{b+c}\right).$$

Рассмотрим конечные последовательности $A=\left(\frac{ab}{a+b},\frac{ca}{c+a},\frac{bc}{b+c}\right)$ и $B=\left(\frac{1}{ab},\frac{1}{ca},\frac{1}{bc}\right)$. Докажем, что они разномонотонны. Можем считать, что $a \ge b \ge c > 0$. Тогда $\frac{1}{ab} \le \frac{1}{ca} \le \frac{1}{bc}$. Покажем, что $\frac{ab}{a+b} \ge \frac{ca}{c+a} \ge \frac{bc}{b+c}$. Неравенство $\frac{ab}{a+b} \ge \frac{ca}{c+a}$ равносильно верному неравенству $(b-c)a^2 \ge 0$, а неравенство $\frac{ca}{c+a} \ge \frac{bc}{b+c}$ – неравенству $(a-b)c^2 \ge 0$. Применяя к последовательностям A и B неравенство Чебышёва (см. задачу 8.3), получаем требуемое неравенство.

8.13*. Докажем равносильное неравенство

$$\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\left(a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)\right) \le 3(a+b+c).$$

Рассмотрим конечные последовательности

$$A=\left(\frac{1}{b+c},\frac{1}{c+a},\frac{1}{a+b}\right) \text{ и } B=\left(a(b+c),b(c+a),c(a+b)\right).$$

Докажем, что они одномонотонны. Можем считать, что $a \ge b \ge c > 0$. Тогда $b+c \le c+a \le a+b$ и $\frac{1}{b+c} \ge \frac{1}{c+a} \ge \frac{1}{a+b}$.

Покажем, что $a(b+c) \geq b(c+a) \geq c(a+b)$. Неравенство $a(b+c) \geq b(c+a)$ равносильно верному неравенству $(a-b)c \geq 0$, а $b(c+a) \geq c(a+b)$ – неравенству $(b-c)a \geq 0$.

Поскольку последовательности A и B одномонотонны, то, применяя к ним неравенство Чебышёва (см. задачу 8.3), получаем требуемое неравенство.

8.14*. Поскольку $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x} \leq \frac{3(x+y+z)}{2(xy+yz+zx)}$ (см. задачу 8.13) и $3 \leq \frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+zx}$ (см. задачу 1.25), то, перемножив эти два неравенства, получим неравенство, равносильное исходному.

8.15*. Докажем равносильное неравенство

$$\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\left(a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)\right) \leq$$

$$\leq 3\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Рассмотрим конечные последовательности

$$A=\left(\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}\right) \text{ и } B=\left(a(b+c), b(c+a), c(a+b)\right).$$

Докажем, что они одномонотонны. Можем считать, что $a \geq b \geq c > 0$. Тогда $b+c \leq c+a \leq a+b$ и $\frac{a}{b+c} \geq \frac{b}{c+a} \geq \frac{c}{a+b}$. В решении задачи 8.13 доказано, что из условия $a \geq b \geq c > 0$ следует, что $a(b+c) \geq b(c+a) \geq c(a+b)$.

Поскольку последовательности A и B одномонотонны, то, применяя к ним неравенство Чебышёва (см. задачу 8.3), получаем требуемое неравенство.

8.16*. Докажем равносильное неравенство

$$\left(\frac{ab}{a+b}+\frac{ca}{c+a}+\frac{bc}{b+c}\right)\left((a+b)+(c+a)+(b+c)\right) \leq 3(ab+ca+bc).$$

Рассмотрим конечные последовательности

$$A=\left(\frac{ab}{a+b}, \frac{ca}{c+a}, \frac{bc}{b+c}\right) \text{ и } B=(a+b, c+a, b+c).$$

Докажем, что они одномонотонны. Можем считать, что $a \geq b \geq c > 0$. Тогда $a+b \geq c+a \geq b+c$ и $\frac{ab}{a+b} \geq \frac{ca}{c+a} \geq \frac{bc}{b+c}$ (см. решение задачи 8.12). Применяя к последовательностям A

и B неравенство Чебышёва (см. задачу 8.3), получаем требуемое неравенство.

8.17*. Неравенство равносильно условию

$$\left(\frac{a(b+c)}{b^2+c^2}+\frac{b(c+a)}{c^2+a^2}+\frac{c(a+b)}{a^2+b^2}\right)\left(\left(b^2+c^2\right)+\left(c^2+a^2\right)+\left(a^2+b^2\right)\right)\geq$$

$$\geq 3\left(a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)\right). \quad (88)$$

Докажем разномонотонность двух конечных последовательностей $A=\left(\frac{a(b+c)}{b^2+c^2}, \frac{b(c+a)}{c^2+a^2}, \frac{a(a+b)}{a^2+b^2},\right)$ и $B=\left(b^2+c^2, c^2+a^2, a^2+b^2\right)$. Можем считать, что $a\geq b\geq c>0$, тогда $a(b+c)\geq b(c+a)\geq c(a+b)$ (см. решение задачи 8.13) и $\frac{1}{b^2+c^2}\geq\frac{1}{c^2+a^2}\geq\frac{1}{a^2+b^2}$, а из этого следует $\frac{a(b+c)}{b^2+c^2}\geq$ $\geq\frac{b(c+a)}{c^2+a^2}\geq\frac{c(a+b)}{a^2+b^2}$. Кроме того, $b^2+c^2\leq c^2+a^2\leq a^2+b^2$, следовательно, последовательности A и B разномонотонны. Применяя к ним неравенство Чебышёва (см. задачу 8.3), получаем неравенство 88.

8.18*. *Первый способ.* Докажем неравенство

$$\left(a^2\left(b^2+c^2\right)+b^2\left(c^2+a^2\right)+c^2\left(a^2+b^2\right)\right)\times$$

$$\times\left(\frac{a}{b^2+c^2}\cdot\left(b^2+c^2\right)+\frac{b}{c^2+a^2}\cdot\left(c^2+a^2\right)+\frac{c}{a^2+b^2}\cdot\left(a^2+b^2\right)\right)\leq$$

$$\leq\left(\left(b^2+c^2\right)+\left(c^2+a^2\right)+\left(a^2+b^2\right)\right)\left(a^3+b^3+c^3\right). \quad (89)$$

Заметим, что последовательности $\left(a^2, b^2, c^2\right)$ и $\left(\frac{a}{b^2+c^2}, \frac{b}{c^2+a^2}, \frac{c}{a^2+b^2}\right)$ одномонотонны. Действительно, можем считать, что $a\geq b\geq c$. Тогда $a^2\geq b^2\geq c^2$ и $\frac{a}{b^2+c^2}\geq\frac{b}{c^2+a^2}\geq\frac{c}{a^2+b^2}$. Если в неравенстве (36) положить $X=\left(b^2+c^2, c^2+a^2, a^2+b^2\right)$, $A=\left(a^2, b^2, c^2\right)$, $B=\left(\frac{a}{b^2+c^2}, \frac{b}{c^2+a^2}, \frac{c}{a^2+b^2}\right)$, то получим неравенство (89), равносильное исходному.

Второй способ. Раскрыв скобки в неравенстве, после приведения подобных слагаемых получим неравенство

$a^5+b^5+c^5 \geq ab^2c^2+a^2bc^2+a^2b^2c$. Последнее неравенство получается сложением трех верных неравенств

$$\frac{a^5+2b^5+2c^5}{5} \geq ab^2c^2, \quad \frac{2a^5+b^5+2c^5}{5} \geq a^2bc^2,$$

$$\frac{2a^5+2b^5+c^5}{5} \geq a^2b^2c,$$

которые в свою очередь следуют из неравенства Коши для пяти переменных.

8.19*. *Первый способ.* Докажем неравенство

$$\left(a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)\right)\times$$
$$\times\left(\frac{a^2}{b+c}\cdot(b+c)+\frac{b^2}{c+a}\cdot(c+a)+\frac{c^2}{a+b}\cdot(a+b)\right)\leq$$
$$\leq\left((b+c)+(c+a)+(a+b)\right)\left(a^3+b^3+c^3\right). \quad (90)$$

Заметим, что последовательности (a, b, c) и $\left(\frac{a^2}{b+c}, \frac{b^2}{c+a}, \frac{c^2}{a+b}\right)$ одномонотонны. Если в неравенстве (36) положить $X=(b+c, c+a, a+b)$, $A=(a, b, c)$, $B=\left(\frac{a^2}{b+c}, \frac{b^2}{c+a}, \frac{c^2}{a+b}\right)$, то получим неравенство (90), равносильное исходному.

Второй способ. Раскрыв скобки в неравенстве, после приведения подобных слагаемых получим неравенство $a^4+b^4+c^4 \geq a^2bc+ab^2c+abc^2$. Последнее неравенство получается сложением трех верных неравенств

$$\frac{2a^4+b^4+c^4}{4} \geq a^2bc, \quad \frac{a^4+2b^4+c^4}{4} \geq ab^2c, \quad \frac{a^4+b^4+2c^4}{4} \geq abc^2,$$

которые в свою очередь следуют из неравенства Коши для четырех переменных.

8.20*. Докажем неравенство

$$\left(x_1^{a-b}x_1^b+x_2^{a-b}x_2^b+\ldots+x_n^{a-b}x_n^b\right)\left(x_1^{d-b}x_1^b+x_2^{d-b}x_2^b+\ldots+x_n^{d-b}x_n^b\right)\geq$$
$$\geq\left(x_1^b+x_2^b+\ldots+x_n^b\right)\left(x_1^c+x_2^c+\ldots+x_n^b\right). \quad (91)$$

Заметим, что последовательности $A=\left(x_1^{a-b}, x_2^{a-b}, \ldots, x_n^{a-b}\right)$ и $B=\left(x_1^{d-b}, x_2^{d-b}, \ldots, x_n^{d-b}\right)$ разномонотонны. Действительно, можно считать, что $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$; тогда $x_1^{a-b} \leq x_2^{a-b} \leq \ldots \leq x_n^{a-b}$ и $x_1^{d-b} \geq x_2^{d-b} \geq \ldots \geq x_n^{d-b}$, поскольку $a-b<0$ и $d-b>0$. Если положить $A=\left(x_1^{a-b}, x_2^{a-b}, \ldots, x_n^{a-b}\right)$, $B=\left(x_1^{d-b}, x_2^{d-b}, \ldots, x_n^{d-b}\right)$,

$X = \left(x_1^b, x_2^b, \ldots, x_n^b\right)$ в неравенстве (37), то получим неравенство (91), равносильное исходному.

8.21*. *Первый способ.* Положим в неравенстве (37)

$$A = (a_1, a_2, a_3) = (x, y, z),$$

$$B = (b_1, b_2, b_3) = \left((y+z)^2, (z+x)^2, (x+y)^2\right),$$

$$X = \left(\frac{1}{y+z}, \frac{1}{z+x}, \frac{1}{x+y}\right).$$

Последовательности A и B разномонотонны, так как если $x \ge y \ge z$, то $(y+z)^2 \le (z+x)^2 \le (x+y)^2$. Тогда

$$\left(x \cdot \frac{1}{y+z} + y \cdot \frac{1}{z+x} + z \cdot \frac{1}{x+y}\right) \times$$

$$\times \left((y+z)^2 \cdot \frac{1}{y+z} + (z+x)^2 \cdot \frac{1}{z+x} + (x+y)^2 \cdot \frac{1}{x+y}\right) \ge$$

$$\ge \left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y}\right)\left(x(y+z) + y(z+x) + z(x+y)\right),$$

что равносильно исходному неравенству.

Второй способ. Умножим обе части исходного неравенства на выражение $(x+y)(y+z)(z+x)$, раскроем скобки и перенесем все слагаемые в левую часть. Сгруппировав слагаемые и выделив полные квадраты, получим верное неравенство

$$\left(x^2 - yz\right)^2 + \left(y^2 - zx\right)^2 + \left(z^2 - xy\right)^2 +$$

$$+ xy(x-y)^2 + yz(y-z)^2 + zx(z-x)^2 \ge 0.$$

8.22*. *Первый способ.* Положим в неравенстве (36) $X = \left(\frac{1}{y+z}, \frac{1}{z+x}, \frac{1}{x+y}\right)$, $A = (x, y, z)$, $B = \left(x(y+z), y(z+x), z(x+y)\right)$. Последовательности A и B одномонотонны, так как если $x \ge y \ge z$, то $x(y+z) \ge y(z+x) \ge z(x+y)$. Получаем неравенство

$$\left(x \cdot \frac{1}{y+z} + y \cdot \frac{1}{z+x} + z \cdot \frac{1}{x+y}\right) \times$$

$$\times \left(x(y+z) \cdot \frac{1}{y+z} + y(z+x) \cdot \frac{1}{z+x} + z(x+y) \cdot \frac{1}{x+y}\right) \le$$

$$\le \left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y}\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right),$$

равносильное исходному.

Второй способ. Умножим обе части исходного неравенства на выражение $(x+y)(y+z)(z+x)$, раскроем скобки и перенесем все слагаемые в одну часть. Сгруппировав слагаемые и выделив полные квадраты, получим верное неравенство

$$x(y+z)(y-z)^2+y(z+x)(z-x)^2+z(x+y)(x-y)^2\geq 0.$$

8.23*. Докажем неравенство

$$\left((y+z)\cdot\frac{1}{x(y+z)}+(z+x)\cdot\frac{1}{y(z+x)}+(x+y)\cdot\frac{1}{z(x+y)}\right)\times$$
$$\times\left(x^2\cdot\frac{1}{x(y+z)}+y^2\cdot\frac{1}{y(z+x)}+z^2\cdot\frac{1}{z(x+y)}\right)\geq$$
$$\geq\left(\frac{1}{x(y+z)}+\frac{1}{y(z+x)}+\frac{1}{z(x+y)}\right)(x+y+z). \quad (92)$$

Заметим, что конечные последовательности $(y+z,\ z+x,\ x+y)$ и $(x^2,\ y^2,\ z^2)$ разномонотонны. Если положить $A=(y+z,\ z+x,\ x+y)$, $B=(x^2,\ y^2,\ z^2)$, $X=\left(\frac{1}{x(y+z)},\frac{1}{y(z+x)},\frac{1}{z(x+y)}\right)$ в неравенстве (37), то получим неравенство (92), равносильное исходному.

8.24*. Докажем неравенство

$$\left(x\cdot\frac{1}{x(y+z)}+y\cdot\frac{1}{y(z+x)}+z\cdot\frac{1}{z(x+y)}\right)\times$$
$$\left(x^3(y+z)\cdot\frac{1}{x(y+z)}+y^3(z+x)\cdot\frac{1}{y(z+x)}+z^3(x+y)\cdot\frac{1}{z(x+y)}\right)\leq$$
$$\leq\left(\frac{1}{x(y+z)}+\frac{1}{y(z+x)}+\frac{1}{z(x+y)}\right)(x^3+y^3+z^3). \quad (93)$$

Заметим, что последовательности $(x^3(y+z),\ y^3(z+x),\ z^3(x+y))$ и $(x,\ y,\ z)$ одномонотонны. Действительно, можем считать, что $x\geq y\geq z>0$. Тогда $x^2\geq y^2\geq z^2$ и $x(y+z)\geq y(z+x)\geq z(x+y)$ (см. решение задачи 8.13). Перемножая почленно два последних двойных неравенства, получаем $x^3(y+z)\geq y^3(z+x)\geq z^3(x+y)$. Если положить $A=(x,\ y,\ z)$, $B=(x^3(y+z),\ y^3(z+x),\ z^3(x+y))$, $X=\left(\frac{1}{x(y+z)},\frac{1}{y(z+x)},\right.$

$\left.\dfrac{1}{z(x+y)}\right)$ в неравенстве (36), то получим неравенство (93), равносильное исходному.

8.25*. Рассмотрим конечные последовательности

$$A=\left(\frac{a+b}{ab},\frac{c+a}{ca},\frac{b+c}{bc}\right) \text{ и } B=\left(\frac{ab}{c},\frac{ca}{b},\frac{bc}{a}\right).$$

Докажем, что они разномонотонны. Можем считать, что $a\ge b\ge c>0$. Тогда $\dfrac{a+b}{ab}\le\dfrac{c+a}{ca}\le\dfrac{b+c}{bc}$ (см. решение задачи 8.12) и $\dfrac{ab}{c}\ge\dfrac{ca}{b}\ge\dfrac{bc}{a}$. Так как A и B разномонотонны, то, применяя к ним неравенство Чебышёва (см. задачу 8.3), получаем

$$\left(\frac{a+b}{ab}+\frac{c+a}{ca}+\frac{b+c}{bc}\right)\left(\frac{ab}{c}+\frac{ca}{b}+\frac{bc}{a}\right)\ge$$

$$\ge 3\left(\frac{a+b}{c}+\frac{c+a}{b}+\frac{b+c}{a}\right)=\frac{3a^2(b+c)+3b^2(c+a)+3c^2(a+b)}{abc}.$$

Поскольку

$$\frac{a+b}{ab}+\frac{c+a}{ca}+\frac{b+c}{bc}=2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),$$

$$\frac{ab}{c}+\frac{ca}{b}+\frac{bc}{a}=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{abc},$$

то последнее неравенство запишется как

$$2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{abc}\right)\ge$$

$$\ge\frac{3a^2(b+c)+3b^2(c+a)+3c^2(a+b)}{abc},$$

откуда следует исходное неравенство.

8.26*. Докажем равносильное неравенство

$$(\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\ldots+\cos\alpha_n)(\operatorname{tg}\alpha_1+\operatorname{tg}\alpha_2+\ldots+\operatorname{tg}\alpha_n)\ge$$

$$\ge n(\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\ldots+\sin\alpha_n).$$

В силу симметричности неравенства можем считать, что $0\le\alpha_1\le\alpha_2\le\ldots\le\alpha_n<\dfrac{\pi}{2}$. Рассмотрим конечные последовательности $A=(\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \ldots, \cos\alpha_n)$ и $B=(\operatorname{tg}\alpha_1, \operatorname{tg}\alpha_2, \ldots, \operatorname{tg}\alpha_n)$.

Поскольку функция $y = \cos x$ убывает на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, а функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на этом промежутке, то $\cos\alpha_1 \geq \cos\alpha_2 \geq \ldots \geq \cos\alpha_n$ и $\operatorname{tg}\alpha_1 \leq \operatorname{tg}\alpha_2 \leq \ldots \leq \operatorname{tg}\alpha_n$, следовательно, последовательности A и B разномонотонны. Применяя к ним неравенство Чебышёва (см. задачу 8.3), получаем требуемое неравенство.

Глава 9. Метод Штурма

9.4. Это неравенство может быть доказано методом математической индукции (см. задачу 4.20). Здесь мы докажем его методом Штурма. Положим $c = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$. Тогда исходное неравенство запишется в виде

$$(1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_n) \geq (1 + c)^n. \tag{94}$$

Заметим, что это неравенство реализуется в форме равенства при условии, что все $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равны c, а это равносильно равенствам $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. В случае, когда одна из переменных равна 0, неравенство верно. Рассмотрим функцию n переменных

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_n).$$

Случай, когда все переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равны, уже рассмотрен. Пусть теперь не все переменные равны и среди переменных нет нулей, тогда найдутся две переменные, одна из которых меньше c, а другая больше. Поскольку исходное неравенство симметрично, то без ограничения общности можно считать, что этими переменными являются x_k и x_{k+1}, причем $x_k < c < x_{k+1}$, а все $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ и только они равны c (может оказаться, что нет переменных, равных c, тогда полагаем $k = 1$). Положим $x'_k = c$. Из утверждения 9.2 следует, что найдется $x'_{k+1} \in (x_k; x_{k+1})$ такое, что $x'_k x'_{k+1} = x_k x_{k+1}$. Сдвинем теперь числа x_k и x_{k+1} с сохранением их произведения так, чтобы они перешли в числа x'_k и x'_{k+1}. Остальные переменные оставим без изменения. Докажем, что при переходе от переменных $(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)$ к переменным $(x_1, \ldots, x_{k-1}, x'_k, x'_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)$ значение функции f уменьшится. Действительно, поскольку при сдвигании двух положительных чисел с сохранением произведения их сумма уменьшается, то $x_k + x_{k+1} > x'_k + x'_{k+1}$, поэтому

$$(1 + x_k)(1 + x_{k+1}) = 1 + x_k x_{k+1} + x_k + x_{k+1} >$$

$$> 1 + x'_k x'_{k+1} + x'_k + x'_{k+1} = (1 + x'_k)(1 + x'_{k+1}),$$

следовательно,

$$f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n) =$$
$$= (1+x_1)\ldots(1+x_{k-1})(1+x_k)(1+x_{k+1})(1+x_{k+2})\ldots(1+x_n) >$$
$$> (1+x_1)\ldots(1+x_{k-1})(1+x_k')(1+x_{k+1}')(1+x_{x+2})\ldots(1+x_n) =$$
$$= f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k', x_{k+1}', x_{k+2}, \ldots, x_n).$$

Произведение всех переменных из нового набора будет также равно c^n, причем в новом наборе переменных число c будет встречаться, по меньшей мере, на один раз больше, чем в старом. Таким образом, последовательно сдвигая пары переменных описанным выше способом до тех пор, пока все они не станут равны c, мы получим цепочку неравенств

$$f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n) >$$
$$> f(x_1, \ldots, x_{k-1}, c, x_{k+1}', x_{k+2}, \ldots, x_n) > \ldots$$
$$\ldots > f(x_1, \ldots, x_{k-1}, c, c, c, \ldots, c) = (1+c)^n = \left(1+\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}\right)^n.$$

Неравенство (94) доказано.

9.5. Заметим, что это неравенство реализуется в форме равенства при условии, что $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{1}{n}$. Рассмотрим функцию n переменных

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2.$$

Случай, когда все переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равны, уже рассмотрен. Пусть теперь не все переменные равны, тогда найдутся две переменные, одна из которых меньше $\frac{1}{n}$, а другая больше. Поскольку исходное неравенство симметрично, то без ограничения общности мы можем считать, что этими переменными являются x_k и x_{k+1}, причем $x_k < \frac{1}{n} < x_{k+1}$, а все $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ и только они равны $\frac{1}{n}$ (может оказаться, что нет переменных, равных $\frac{1}{n}$, тогда полагаем $k = 1$). Положим $x_k' = \frac{1}{n}$. Из утверждения 9.2 следует, что найдется $x_{k+1}' \in (x_k; x_{k+1})$ такое, что $x_k' + x_{k+1}' = x_k + x_{k+1}$. Сдвинем теперь числа x_k и x_{k+1} с сохранением их суммы так, чтобы они перешли в числа x_k' и x_{k+1}'. Остальные переменные оставим без изменения. Докажем, что при переходе от переменных $(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)$ к переменным $(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k', x_{k+1}', x_{k+2}, \ldots, x_n)$ значение функции f уменьшится. Действительно, поскольку при сдвигании двух положительных чисел с сохранением суммы их произведение увеличивается, то $x_k x_{k+1} < x'_k x'_{k+1}$, поэтому

$$x_k^2 + x_{k+1}^2 = (x_k + x_{k+1})^2 - 2x_k x_{k+1} >$$

$$> (x'_k + x'_{k+1})^2 - 2x'_k x'_{k+1} = x_k'^2 + x_{k+1}'^2,$$

следовательно,

$$f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n) =$$

$$= x_1^2 + \ldots + x_{k-1}^2 + x_k^2 + x_{k+1}^2 + x_{k+2}^2 + \ldots + x_n^2 >$$

$$> x_1^2 + \ldots + x_{k-1}^2 + x_k'^2 + x_{k+1}'^2 + x_{k+2}^2 + \ldots + x_n^2 =$$

$$= f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x'_k, x'_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n).$$

Сумма всех переменных из нового набора будет также равна 1, причем в новом наборе переменных число $\frac{1}{n}$ будет встречаться по меньшей мере на один раз больше, чем в старом. Таким образом, последовательно сдвигая пары переменных описанным выше способом до тех пор, пока все они не станут равны $\frac{1}{n}$, мы получим цепочку неравенств

$$f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n) =$$

$$> f\left(x_1, \ldots, x_{k-1}, \frac{1}{n}, x'_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n\right) > \ldots$$

$$\ldots > f\left(x_1, \ldots, x_{k-1}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$

Неравенство доказано.

9.6. Заметим, что это неравенство реализуется в форме равенства при условии, что $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{1}{n}$. Рассмотрим функцию n переменных

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(1 + \frac{1}{x_1}\right)\left(1 + \frac{1}{x_2}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{x_n}\right).$$

Случай, когда все переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равны, уже рассмотрен. Пусть теперь не все переменные равны, тогда найдутся две переменные, одна из которых меньше $\frac{1}{n}$, а другая больше. Поскольку исходное неравенство симметрично, то без ограничения общности мы можем считать, что этими переменными являются x_k и x_{k+1}, причем $x_k < \frac{1}{n} < x_{k+1}$, а все $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ и только они равны $\frac{1}{n}$ (может оказаться, что нет переменных, равных $\frac{1}{n}$, тогда полагаем $k = 1$). Положим $x'_k = \frac{1}{n}$. Из утверждения 9.2 следует, что найдется $x'_{k+1} \in (x_k; x_{k+1})$ такое, что $x'_k + x'_{k+1} = x_k + x_{k+1}$. Сдвинем теперь числа x_k и x_{k+1} с сохранением их суммы так, чтобы они перешли в числа x'_k и x'_{k+1}. Остальные переменные оставим без изменения. Докажем, что при переходе от переменных $(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)$ к переменным $(x_1, \ldots, x_{k-1}, x'_k, x'_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)$ значение функции f уменьшится. Действительно, поскольку при сдвигании двух положительных чисел с сохранением суммы их произведение увеличивается, то $x_k x_{k+1} < x'_k x'_{k+1}$, поэтому

$$\left(1+\frac{1}{x_k}\right)\left(1+\frac{1}{x_{k+1}}\right) = 1 + \frac{1 + x_k + x_{k+1}}{x_k x_{k+1}} >$$

$$> 1 + \frac{1 + x'_k + x'_{k+1}}{x'_k x'_{k+1}} = \left(1+\frac{1}{x'_k}\right)\left(1+\frac{1}{x'_{k+1}}\right),$$

следовательно,

$$f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n) =$$

$$= \left(1+\frac{1}{x_1}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{x_{k-1}}\right)\left(1+\frac{1}{x_k}\right)\left(1+\frac{1}{x_{k+1}}\right)\left(1+\frac{1}{x_{k+2}}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{x_n}\right) >$$

$$> \left(1+\frac{1}{x_1}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{x_{k-1}}\right)\left(1+\frac{1}{x'_k}\right)\left(1+\frac{1}{x'_{k+1}}\right)\left(1+\frac{1}{x_{k+2}}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{x_n}\right) =$$

$$= f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x'_k, x'_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n).$$

Сумма всех переменных из нового набора будет также равна 1, причем в новом наборе переменных число $\frac{1}{n}$ будет встречаться по меньшей мере на один раз больше, чем в старом. Таким образом, последовательно сдвигая пары переменных описанным выше способом до тех пор, пока все они не станут равны $\frac{1}{n}$, мы получим цепочку неравенств

$$f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n) >$$

$$> f\left(x_1, \ldots, x_{k-1}, \frac{1}{n}, x'_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n\right) > \ldots$$

$$\ldots > f\left(x_1, \ldots, x_{k-1}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right) = (n+1)^n.$$

Неравенство доказано.

9.7. Заметим, что это неравенство реализуется в форме равенства при условии, что $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \dfrac{1}{n}$. Рассмотрим функцию n переменных

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n)}{(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)}.$$

Случай, когда все переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равны, уже рассмотрен. Пусть теперь не все переменные равны, тогда найдутся две переменные, одна из которых меньше $\dfrac{1}{n}$, а другая больше. Поскольку исходное неравенство симметрично, то без ограничения общности мы можем считать, что этими переменными являются x_k и x_{k+1}, причем $x_k < \dfrac{1}{n} < x_{k+1}$, а все $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ и только они равны $\dfrac{1}{n}$ (может оказаться, что нет переменных, равных $\dfrac{1}{n}$, тогда полагаем $k = 1$). Положим $x'_k = \dfrac{1}{n}$. Из утверждения 9.2 следует, что найдется $x'_{k+1} \in (x_k;\, x_{k+1})$ такое, что $x'_k + x'_{k+1} = x_k + x_{k+1}$. Сдвинем теперь числа x_k и x_{k+1} с сохранением их суммы так, чтобы они перешли в числа x'_k и x'_{k+1}. Остальные переменные оставим без изменения. Докажем, что при переходе от переменных $(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)$ к переменным $(x_1, \ldots, x_{k-1}, x'_k, x'_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)$ значение функции f уменьшится. Действительно, поскольку при сдвигании двух положительных чисел с сохранением суммы их произведение увеличивается, то $x_k x_{k+1} < x'_k x'_{k+1}$, поэтому

$$\frac{(1+x_k)(1+x_{k+1})}{(1-x_k)(1-x_{k+1})} = \frac{1+x_k+x_{k+1}+x_k x_{k+1}}{1-(x_k+x_{k+1})+x_k x_{k+1}} =$$

$$= 1 + \frac{2(x_k+x_{k+1})}{1-(x_k+x_{k+1})+x_k x_{k+1}} >$$

$$> 1 + \frac{2(x'_k+x'_{k+1})}{1-(x'_k+x'_{k+1})+x'_k x'_{k+1}} = \frac{(1+x'_k)(1+x'_{k+1})}{(1-x'_k)(1-x'_{k+1})},$$

следовательно,

$$f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n) =$$

$$= \frac{(1+x_1)\ldots(1+x_{k-1})(1+x_k)(1+x_{k+1})(1+x_{k+2})\ldots(1+x_n)}{(1-x_1)\ldots(1-x_{k-1})(1-x_k)(1-x_{k+1})(1-x_{k+2})\ldots(1-x_n)} >$$

$$> \frac{(1+x_1)\ldots(1+x_{k-1})(1+x'_k)(1+x'_{k+1})(1+x_{k+2})\ldots(1+x_n)}{(1-x_1)\ldots(1-x_{k-1})(1-x'_k)(1-x'_{k+1})(1-x_{k+2})\ldots(1-x_n)} =$$

$$= f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x'_k, x'_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n).$$

Сумма всех переменных нового набора будет также равна 1, причем в новом наборе переменных число $\frac{1}{n}$ будет встречаться по меньшей мере на один раз больше, чем в старом. Таким образом, последовательно сдвигая пары переменных описанным выше способом до тех пор, пока все они не станут равны $\frac{1}{n}$, мы получим цепочку неравенств

$$f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n) >$$
$$> f\left(x_1, \dots, x_{k-1}, \frac{1}{n}, x'_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n\right) > \dots$$
$$\dots > f\left(x_1, \dots, x_{k-1}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n.$$

Неравенство доказано.

9.8. Введем обозначение $c = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$. Заметим, что неравенство реализуется в форме равенства при условии, что $x_1 = x_2 = \dots = x_n = c$. Рассмотрим функцию n переменных

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_n}.$$

Случай, когда все переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ равны c, уже рассмотрен. Пусть теперь не все переменные равны c, тогда найдутся две переменные, одна из которых меньше c, а другая больше. Поскольку исходное неравенство симметрично, то без ограничения общности мы можем считать, что этими переменными являются x_k и x_{k+1}, причем $x_k < c < x_{k+1}$, а все $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$ и только они равны c (может оказаться, что нет переменных, равных c, тогда полагаем $k = 1$). Положим $x'_k = c$. Из утверждения 9.2 следует, что найдется $x'_{k+1} \in (x_k; x_{k+1})$ такое, что $x'_k + x'_{k+1} = x_k + x_{k+1}$. Сдвинем теперь числа x_k и x_{k+1} с сохранением их суммы так, чтобы они перешли в числа x'_k и x'_{k+1}. Остальные переменные оставим без изменения. Докажем, что при переходе от переменных $(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n)$ к переменным $(x_1, \dots, x_{k-1}, x'_k, x'_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n)$ значение функции f уменьшится. Действительно, поскольку при сдвигании двух положительных чисел с сохранением суммы их произведение увеличивается, то $x_k x_{k+1} < x'_k x'_{k+1}$, поэтому

$$\frac{1}{1+x_k} + \frac{1}{1+x_{k+1}} = \frac{2 + x_k + x_{k+1}}{1 + x_k + x_{k+1} + x_k x_{k+1}} >$$
$$> \frac{2 + x'_k + x'_{k+1}}{1 + x'_k + x'_{k+1} + x'_k x'_{k+1}} = \frac{1}{1+x'_k} + \frac{1}{1+x'_{k+1}},$$

следовательно,

$$f\left(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n\right) =$$

$$= \frac{1}{1+x_1} + \ldots + \frac{1}{1+x_{k-1}} + \frac{1}{1+x_k} + \frac{1}{1+x_{k+1}} + \frac{1}{1+x_{k+2}} + \ldots + \frac{1}{1+x_n} >$$

$$= \frac{1}{1+x_1} + \ldots + \frac{1}{1+x_{k-1}} + \frac{1}{1+x'_k} + \frac{1}{1+x'_{k+1}} + \frac{1}{1+x_{k+2}} + \ldots + \frac{1}{1+x_n} =$$

$$= f\left(x_1, \ldots, x_{k-1}, x'_k, x'_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n\right).$$

Сумма всех переменных из нового набора будет равна первоначальной, причем в новом наборе переменных число c будет встречаться, по меньшей мере, на один раз больше, чем в старом. Таким образом, последовательно сдвигая пары переменных описанным выше способом до тех пор, пока все они не станут равны c, мы получим цепочку неравенств

$$f\left(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n\right) >$$

$$> f\left(x_1, \ldots, x_{k-1}, c, x'_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n\right) > \ldots$$

$$\ldots > f\left(x_1, \ldots, x_{k-1}, c, c, c, \ldots, c\right) = \frac{n}{1+c} = \frac{n^2}{n + x_1 + x_2 + \ldots + x_n}.$$

Неравенство доказано.

9.9. Введем обозначение $c = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$. Заметим, что неравенство реализуется в форме равенства при условии, что $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = c$. Очевидно, что при $c = 0$ неравенство верно. Рассмотрим функцию n переменных

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \ldots + \frac{1}{1+x_n}.$$

Случай, когда все переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равны c, уже рассмотрен. Пусть теперь не все переменные равны c, причем $c > 0$. Тогда найдутся две переменные, одна из которых меньше c, а другая больше. Поскольку исходное неравенство симметрично, то без ограничения общности мы можем считать, что этими переменными являются x_k и x_{k+1}, причем $0 < x_k < c < x_{k+1}$, а все $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ и только они равны c (может оказаться, что нет переменных, равных c, тогда полагаем $k = 1$). Положим $x'_k = c$. Из утверждения 9.2 следует, что найдется $x'_{k+1} \in \left(x_k; x_{k+1}\right)$ такое, что $x'_k x'_{k+1} = x_k x_{k+1}$. Сдвинем теперь числа x_k и x_{k+1} с сохранением их произведения так, чтобы они перешли в числа x'_k и x'_{k+1}. Остальные переменные оставим без изменения. Докажем, что при переходе от переменных $\left(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n\right)$ к переменным $\left(x_1, \ldots, x_{k-1}, x'_k, x'_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n\right)$ значение функции f увеличится. Действительно, поскольку при сдвигании двух положительных чисел с сохранением произведения их сумма уменьшается, то $x_k + x_{k+1} > x'_k + x'_{k+1}$, поэтому

$$\frac{1}{1+x_k} + \frac{1}{1+x_{k+1}} = \frac{2+x_k+x_{k+1}}{1+x_k+x_{k+1}+x_k x_{k+1}} =$$

$$= \left(\frac{(2+x_k+x_{k+1}) + (x_k x_{k+1} - 1)}{2+x_k+x_{k+1}} \right)^{-1} = \left(1 - \frac{1-x_k x_{k+1}}{2+x_k+x_{k+1}} \right)^{-1} =$$

$$= \left(1 - \frac{1-x'_k x'_{k+1}}{2+x_k+x_{k+1}} \right)^{-1} < \left(1 - \frac{1-x'_k x'_{k+1}}{2+x'_k+x'_{k+1}} \right)^{-1} = \frac{1}{1+x'_k} + \frac{1}{1+x'_{k+1}}.$$

Здесь мы использовали то, что $1 - x_k x_{k+1} = 1 - x_k x'_{k+1} > 0$. Последнее неравенство строгое, поскольку $x_k < c < x_{k+1} \le 1$. Тогда

$$f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n) =$$

$$= \frac{1}{1+x_1} + \ldots + \frac{1}{1+x_{k-1}} + \frac{1}{1+x_k} + \frac{1}{1+x_{k+1}} + \frac{1}{1+x_{k+2}} + \ldots + \frac{1}{1+x_n} <$$

$$< \frac{1}{1+x_1} + \ldots + \frac{1}{1+x_{k-1}} + \frac{1}{1+x'_k} + \frac{1}{1+x'_{k+1}} + \frac{1}{1+x_{k+2}} + \ldots + \frac{1}{1+x_n} =$$

$$= f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x'_k, x'_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n).$$

Произведение всех переменных из нового набора будет равно первоначальному, причем в новом наборе переменных число c будет встречаться по меньшей мере на один раз больше, чем в старом. Таким образом, последовательно сдвигая пары переменных описанным выше способом до тех пор, пока все они не станут равны c, мы получим цепочку неравенств

$$f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n) <$$

$$< f(x_1, \ldots, x_{k-1}, c, x'_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n) < \ldots$$

$$\ldots < f(x_1, \ldots, x_{k-1}, c, c, c, \ldots, c) = \frac{n}{1+c} = \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}}.$$

Неравенство доказано.

9.10*. Положим

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2(1+x_1+x_2+\ldots+x_n)} - \frac{1}{1+x_1} - \frac{1}{1+x_2} - \ldots - \frac{1}{1+x_n}.$$

Покажем, что

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \ge f(1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \ge$$

$$\ge f(1, 1, x_3, \ldots, x_n) \ge \ldots \ge f(1, 1, 1, \ldots, 1) = 0$$

при условии, что $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0; 1]$. Поскольку функция f симметрична, достаточно доказать неравенство $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \geq f(1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, которое равносильно неравенству

$$\frac{n(n+1)}{2(1+x_1+x_2+\ldots+x_n)}-\frac{1}{1+x_1} \geq \frac{n(n+1)}{2(2+x_2+\ldots+x_n)}-\frac{1}{2}.$$

Обозначим $a = x_1$, $b = x_2 + \ldots + x_n$. Тогда последнее неравенство перепишется в виде

$$\frac{n(n+1)}{2(1+a+b)}-\frac{1}{1+a} \geq \frac{n(n+1)}{2(2+b)}-\frac{1}{2},$$

где $a \in [0; 1]$, $b \in [0; n-1]$. Домножив на общий знаменатель и сгруппировав слагаемые, получим равносильное неравенство

$$(1-a)\Big(a\big(n(n+1)-(b+2)\big)+\big(n(n+1)-(b+1)(b+2)\big)\Big) \geq 0. \quad (95)$$

Так как $0 \leq a \leq 1$, $n(n+1)-(b+2) \geq n(n+1)-(n+1) = n^2-1 \geq 0$ и $n(n+1)-(b+1)(b+2) \geq n(n+1)-n(n+1) = 0$, то неравенство (95) верно, что завершает доказательство.

9.11*. Заметим, что неравенство реализуется в форме равенства при условии, что одна из переменных x_i равна 1, а все остальные равны 0. Это наводит нас на мысль, что для того, чтобы функция n переменных

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\ldots+\frac{1}{1+x_n}$$

достигла своего наибольшего значения из всех возможных при условии, что $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ и $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$, нужно последовательно раздвигать эти переменные с сохранением их суммы до тех пор, пока они не расположатся на концах отрезка $I = [0; 1]$. Если по крайней мере $n-1$ переменных из $x_1, x_2, \ldots, x_n$ располагаются на концах отрезка I, то, как нетрудно проверить, все переменные, кроме одной, равны 0, а оставшаяся равна 1, и тогда исходное неравенство реализуется в форме равенства. Пусть теперь хотя бы две переменные не совпадают с концами отрезка I. Без ограничения общности можно считать, что это переменные x_1 и x_2. Будем раздвигать эти переменные с сохранением суммы до тех пор, пока одна из них не совпадет с 0 или с 1 (ясно, что если одна из них совпадет с 1, то другая совпадет с 0). Другими словами, перейдем от пары переменных (x_1, x_2) к паре (x_1', x_2'), где $x_1' = 0$, $x_2' = x_1 + x_2$. Тогда получим, что $x_1', x_2' \in [0; 1]$, $x_1' + x_2' = x_1 + x_2$ и $|x_1' - x_2'| > |x_1 - x_2|$.

Покажем, что при переходе от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ к переменным $x_1', x_2', \dots, x_n$ значение функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ увеличится. Действительно,

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}=\frac{2+(x_1+x_2)}{1+(x_1+x_2)+x_1x_2}<$$
$$<\frac{2+(x_1'+x_2')}{1+(x_1'+x_2')+x_1'x_2'}=\frac{1}{1+x_1'}+\frac{1}{1+x_2},$$

так как $0=x_1'x_2'<x_1x_2$. Отсюда следует, что $f(x_1, x_2, \dots, x_n)<$ $<f(x_1', x_2', \dots, x_n)$, причем в новом наборе количество совпадающих с концами отрезка I переменных будет по меньшей мере на 1 больше, чем в предыдущем. Продолжая раздвигать переменные до тех пор, пока все они не расположатся на концах отрезка I, получим цепочку неравенств

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)\le f(x_1', x_2', x_3, \dots, x_n)<\dots$$
$$\dots<f(0, 0, 0, \dots, 0, 1)=\frac{2n-1}{2}.$$

Неравенство доказано.

9.12*. Заметим, что это неравенство реализуется в форме равенства при условии, что все переменные равны $\frac{1}{3}$. Это наводит нас на мысль, что для того, чтобы функция $f(x, y, z)=xy+yz+zx-2xyz$ достигла своего наибольшего значения из всех возможных при условии, что $x, y, z\ge 0$, $x+y+$ $+z=1$, нужно последовательно сдвигать эти переменные с сохранением их суммы до тех пор, пока они не станут равны.

Случай, когда $x=y=z=\frac{1}{3}$, уже рассмотрен. Пусть не все переменные равны $\frac{1}{3}$, и пусть x – наименьшая из переменных, y – наибольшая. Тогда $x<\frac{1}{3}<y$. Заметим, что при этом будет выполнено условие $z\le\frac{1}{2}$. Действительно, пусть это не так, т.е. $z>\frac{1}{2}$. Тогда $y=1-x-z<\frac{1}{2}<z$, что противоречит максимальности y. Будем сдвигать переменные x и y с сохранением их суммы до тех пор, пока одна из этих переменных не совпадет с $\frac{1}{3}$. Другими словами, перейдем от набора переменных (x, y, z) к набору (x', y', z), где $x'=\frac{1}{3}$, $y'=x+y-\frac{1}{3}$. Покажем, что при этом значение функции $f(x, y, z)$ не уменьшится. Действитель-

но, поскольку при сдвигании двух чисел с сохранением суммы их произведение увеличивается, то $xy < x'y'$. Тогда

$$f(x, y, z) = xy + yz + zx - 2xyz = xy(1-2z) + (x+y)z =$$

$$= xy(1-2z) + (x'+y')z \le x'y'(1-2z) + (x'+y')z =$$

$$= f(x', y', z) = f\left(\frac{1}{3}, y', z\right).$$

Здесь мы использовали то, что $1 - 2z \ge 0$. Ту же операцию выполним теперь с числами y' и z (если только они не совпадают), получим

$$f(x, y, z) \le f\left(\frac{1}{3}, y', z\right) \le f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{27}.$$

Неравенство доказано.

9.13*. Если $x = y = z = 0$, то неравенство реализуется в форме равенства. Рассмотрим функцию

$$F(x, y, z) = (x+y+z)^2\left(x^2+y^2+z^2\right) - 8\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right).$$

Пусть z – наименьшая из переменных. Покажем, что при сдвигании переменных x и y с сохранением их суммы значение $F(x, y, z)$ уменьшается. Имеет место равенство

$$F(x, y, z) = \left(x^2+y^2\right)\left((x+y+z)^2 - 8z^2\right) - 8x^2y^2 + (x+y+z)^2 z^2.$$

Так как z – наименьшая из переменных, то $(x+y+z)^2 - 8z^2 \ge$ $\ge (3z)^2 - 8z^2 = z^2 \ge 0$. Поскольку при сдвигании двух переменных с сохранением суммы их произведение увеличивается, то значения $-8x^2y^2$ и $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$ уменьшаются, следовательно, значение $F(x, y, z)$ уменьшится. Отсюда получаем, что $F(x, y, z) \ge F\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, z\right)$.

Теперь достаточно показать, что $F(t, t, z) \ge 0$ при положительных t и неотрицательных z. Поделив обе части последнего неравенства на t^4, получим неравенство $F\left(1, 1, \frac{z}{t}\right) \ge 0$, где $\frac{z}{t} \ge 0$. Отсюда следует, что, доказав исходное неравенство для случая $x = y = 1$ и $z \ge 0$, мы докажем это неравенство для всех неотрицательных x, y и z.

Рассмотрим функцию

$$f(z) = (2+z)^2\left(2+z^2\right) - 8\left(1+2z^2\right).$$

Покажем, что $f(z) \geq 0$ для всех $z \geq 0$. Действительно,

$$f(z) = \left(z^2 + 4z + 4\right)\left(z^2 + 2\right) - 8 - 16z^2 =$$

$$= z\left(z^3 + 4z^2 - 10z + 8\right) = z\left(z^3 + \left(2z - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\right) \geq 0,$$

что завершает доказательство исходного неравенства.

9.14*. Заметим, что при раздвигании двух чисел x и y с сохранением их суммы величина $x^2 + y^2$ увеличивается. Действительно, это следует из того, что

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}\left((x+y)^2 + |x-y|^2\right).$$

Раздвинем переменные x_1 и x_2: заменим пару x_1, x_2 парой ε_1, $\tilde{x}_2$, где $x_1 + x_2 = \varepsilon_1 + \tilde{x}_2$ и $\varepsilon_1 \in \{0, 1\}$, так, чтобы $\tilde{x}_2 \in [0; 1]$. Тогда

$$4\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2\right) \leq 4\left(\varepsilon_1^2 + \tilde{x}_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2\right).$$

Ту же процедуру выполним с переменными $\tilde{x}_2$ и x_3, получим, что

$$4\left(\varepsilon_1^2 + \tilde{x}_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2\right) \leq 4\left(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \tilde{x}_3^2 + \ldots + x_n^2\right),$$

где $\tilde{x}_2 + x_3 = \varepsilon_2 + \tilde{x}_3$, $\tilde{x}_3 \in [0; 1]$ и $\varepsilon_2 \in \{0, 1\}$, и т.д. В итоге получим цепочку неравенств

$$4\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2\right) \leq 4\left(\varepsilon_1^2 + \tilde{x}_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2\right) \leq$$

$$\leq 4\left(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \tilde{x}_3^2 + \ldots + x_n^2\right) \leq \ldots \leq 4\left(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \ldots + \tilde{x}_n^2\right),$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1} \in \{0, 1\}$, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots + \tilde{x}_n = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$ и $\tilde{x}_n \in [0; 1]$. Достаточно доказать, что

$$4\left(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_{n-1}^2 + \tilde{x}_n^2\right) \leq \left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{n-1} + \tilde{x}_n + 1\right)^2.$$

Так как $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1} \in \{0, 1\}$, то имеем $\varepsilon_i^2 = \varepsilon_i$ для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Тогда $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_{n-1}^2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{n-1}$. Обозначим $\alpha = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{n-1}$, $t = \tilde{x}_n$. Достаточно доказать, что для каждого целого неотрицательного α и каждого $t \in [0; 1]$ выполнено неравенство $4\left(\alpha + t^2\right) \leq (\alpha + t + 1)^2$ или, что то же самое, $-3t^2 + 2(\alpha + 1)t + \left(\alpha^2 - 2\alpha + 1\right) \geq 0$. Рассмотрим функцию $f(t) = -3t^2 + 2(\alpha + 1)t + \left(\alpha^2 - 2\alpha + 1\right)$. Это квадратичная функция с отрицательным старшим коэффициентом. Так как у нее нет точек минимума и при этом $f(0) = (\alpha - 1)^2 \geq 0$ и $f(1) = \alpha^2 \geq 0$, то $f(t) \geq 0$ при $t \in [0; 1]$, что завершает доказательство.

9.15*. а) Обозначим $c=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$. Заметим, что неравенство реализуется в форме равенства при условии, что $x_1=x_2=\ldots=x_n=c$. Рассмотрим функцию n переменных

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\frac{1}{1+x_1^2}+\frac{1}{1+x_2^2}+\ldots+\frac{1}{1+x_n^2}.$$

Случай, когда все переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равны c, уже рассмотрен. Пусть теперь не все переменные равны c, тогда найдутся две переменные, одна из которых меньше c, а другая больше. Поскольку исходное неравенство симметрично, то без ограничения общности мы можем считать, что этими переменными являются x_k и x_{k+1}, причем $x_k<c<x_{k+1}$, а все $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ и только они равны c (может оказаться, что нет переменных, равных c, тогда полагаем $k=1$). Положим $x'_k=c$. Из утверждения 9.2 следует, что найдется $x'_{k+1}\in(x_k; x_{k+1})$ такое, что $x'_k+x'_{k+1}=x_k+x_{k+1}$. Сдвинем теперь числа x_k и x_{k+1} с сохранением их суммы так, чтобы они перешли в числа x'_k и x'_{k+1}. Остальные переменные оставим без изменения. Докажем, что при переходе от переменных $(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)$ к переменным $(x_1, \ldots, x_{k-1}, x'_k, x'_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)$ значение функции f уменьшится.

Заметим, что $x_k x_{k+1}<x'_k x'_{k+1}$, поскольку при сдвигании двух положительных чисел с сохранением суммы их произведение увеличивается. Положим $a=(x_k+x_{k+1})^2=(x'_k+x'_{k+1})^2$, $u=x_k x_{k+1}$, $v=x'_k x'_{k+1}$. Тогда $x_k^2+x_{k+1}^2=a-2u$, $x_k'^2+x_{k+1}'^2=a-{}$ $-2v$, при этом $a\geq 4v$, $v>u\geq\frac{1}{\sqrt{3}}x_{k+1}>\frac{1}{3}$. Из перечисленных выше соотношений получаем, что

$$\frac{1}{1+x_k^2}+\frac{1}{1+x_{k+1}^2}-\left(\frac{1}{1+x_k'^2}+\frac{1}{1+x_{k+1}'^2}\right)=$$

$$=\frac{2+x_k^2+x_{k+1}^2}{1+x_k^2+x_{k+1}^2+x_k^2x_{k+1}^2}-\frac{2+x_k'^2+x_{k+1}'^2}{1+x_k'^2+x_{k+1}'^2+x_k'^2x_{k+1}'^2}=$$

$$=\frac{(2+a-2u)\left(1+a-2v+v^2\right)-(2+a-2v)\left(1+a-2u+u^2\right)}{\left(1+a-2u+u^2\right)\left(1+a-2v+v^2\right)}=$$

$$=\frac{(v-u)\left(a(v+u)-2uv+2v+2u-2\right)}{\left(1+a-2u+u^2\right)\left(1+a-2v+v^2\right)}\geq$$

$$= \frac{(v-u)\left(4v(v+u)-2uv+2v+2u-2\right)}{\left(1+a-2u+u^2\right)\left(1+a-2v+v^2\right)} =$$

$$= \frac{2(v-u)\left(2v^2+(u+1)v+u-1\right)}{\left(1+a-2u+u^2\right)\left(1+a-2v+v^2\right)} =$$

$$= \frac{2(v-u)(v+1)(2v+u-1)}{\left(1+a-2u+u^2\right)\left(1+a-2v+v^2\right)} >$$

$$> \frac{2(v-u)(v+1)\left(2\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-1\right)}{\left(1+a-2u+u^2\right)\left(1+a-2v+v^2\right)} = 0,$$

следовательно,

$$f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n) =$$

$$= \frac{1}{1+x_1^2} + \ldots + \frac{1}{1+x_{k-1}^2} + \frac{1}{1+x_k^2} + \frac{1}{1+x_{k+1}^2} + \frac{1}{1+x_{k+2}^2} + \ldots + \frac{1}{1+x_n^2} >$$

$$> \frac{1}{1+x_1^2} + \ldots + \frac{1}{1+x_{k-1}^2} + \frac{1}{1+x_k'^2} + \frac{1}{1+x_{k+1}'^2} + \frac{1}{1+x_{k+2}^2} + \ldots + \frac{1}{1+x_n^2} =$$

$$= f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k', x_{k+1}', x_{k+2}, \ldots, x_n).$$

Сумма всех переменных из нового набора будет равна первоначальной, причем в новом наборе переменных число c будет встречаться по меньшей мере на один раз больше, чем в старом. Таким образом, последовательно сдвигая пары переменных описанным выше способом до тех пор, пока все они не станут равны c, мы получим цепочку неравенств

$$f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n) >$$

$$> f(x_1, \ldots, x_{k-1}, c, x_{k+1}', x_{k+2}, \ldots, x_n) > \ldots > f(x_1, \ldots, x_{k-1}, c, c, c, \ldots, c) =$$

$$= \frac{n}{1+c^2} = \frac{n^3}{n^2+(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2}.$$

Неравенство доказано.

б) Пусть теперь $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \left[0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$. Определим величину c и функцию f так же, как и выше. Если все переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равны c, то неравенство реализуется в форме равенства. Пусть теперь не все переменные равны c, тогда найдутся две переменные, одна из которых меньше c, а другая больше. Можем считать, что этими переменными являются x_k и

x_{k+1}, причем $x_k < c < x_{k+1}$, а все $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ и только они равны c (здесь $k \geq 1$). Положим $x'_k = c$. Из утверждения 9.2 следует, что найдется $x'_{k+1} \in (x_k; x_{k+1})$ такое, что $x'_k + x'_{k+1} = x_k + x_{k+1}$. Сдвинем числа x_k и x_{k+1} так, чтобы они перешли в числа x'_k и x'_{k+1}. Тогда $x_k x_{k+1} < x'_k x'_{k+1}$. Определим величины a, u и v теми же формулами, что и раньше. Имеют место неравенства $a - 2u + 2 \geq 2 > 0$, $v \leq \frac{a}{4}$, $a \leq \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{4}{3}$ и $u < v \leq \frac{1}{3}$. Докажем теперь, что при переходе от переменных $(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)$ к переменным $(x_1, \ldots, x_{k-1}, x'_k, x'_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)$ значение f увеличится:

$$\frac{1}{1+x_k^2} + \frac{1}{1+x_{k+1}^2} - \left(\frac{1}{1+x_k'^2} + \frac{1}{1+x_{k+1}'^2}\right) =$$

$$= \frac{(v-u)\big(a(v+u) - 2uv + 2v + 2u - 2\big)}{\left(1+a-2u+u^2\right)\left(1+a-2v+v^2\right)} =$$

$$= \frac{(v-u)\big(v(a-2u+2) + u(a+2) - 2\big)}{\left(1+a-2u+u^2\right)\left(1+a-2v+v^2\right)} \leq$$

$$\leq \frac{(v-u)\left(\frac{a}{4}(a-2u+2) + u(a+2) - 2\right)}{\left(1+a-2u+u^2\right)\left(1+a-2v+v^2\right)} =$$

$$= \frac{(v-u)(a+4)(a+2u-2)}{4\left(1+a-2u+u^2\right)\left(1+a-2v+v^2\right)} <$$

$$< \frac{(v-u)(a+4)\left(\frac{4}{3} + 2\cdot\frac{1}{3} - 2\right)}{4\left(1+a-2u+u^2\right)\left(1+a-2v+v^2\right)} = 0.$$

Следовательно,

$$f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n) =$$

$$= \frac{1}{1+x_1^2} + \ldots + \frac{1}{1+x_{k-1}^2} + \frac{1}{1+x_k^2} + \frac{1}{1+x_{k+1}^2} + \frac{1}{1+x_{k+2}^2} + \ldots + \frac{1}{1+x_n^2} <$$

$$< \frac{1}{1+x_1^2} + \ldots + \frac{1}{1+x_{k-1}^2} + \frac{1}{1+x_k'^2} + \frac{1}{1+x_{k+1}'^2} + \frac{1}{1+x_{k+2}^2} + \ldots + \frac{1}{1+x_n^2} =$$

$$= f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x'_k, x'_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n).$$

Сумма всех переменных из нового набора будет равна первоначальной, причем в новом наборе переменных число c будет встречаться по меньшей мере на один раз больше, чем в старом. Таким образом, последовательно сдвигая пары переменных описанным выше способом до тех пор, пока все они не станут равны c, мы получим цепочку неравенств

$$f\left(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n\right) <$$

$$< f\left(x_1, \ldots, x_{k-1}, c, x'_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n\right) < \ldots$$

$$\ldots < f\left(x_1, \ldots, x_{k-1}, c, c, c, \ldots, c\right) = \frac{n}{1+c^2} = \frac{n^3}{n^2 + \left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right)^2}.$$

Неравенство доказано.

9.16*. Данное неравенство является циклическим. Сделаем в нем замену переменных, положив $x = a + b$, $y = b + c$, $z = c + a$. Тогда $a = \frac{z+x-y}{2}$, $b = \frac{x+y-z}{2}$, $c = \frac{y+z-x}{2}$. В силу цикличности неравенства можно считать, не ограничивая общности рассуждений, что a – наибольшее из чисел a, b и c. Очевидно, что поскольку a, b и c положительны, то x, y и z тоже положительны, хотя обратное неверно. Исходное неравенство в новых переменных запишется как

$$2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right) - \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x}\right) - 3 \geq 0, \qquad (96)$$

где x, y, $z > 0$, причем это неравенство более сильное, чем исходное. Сделав еще одну замену переменных $p = \frac{x}{y}$, $q = \frac{y}{z}$, $r = \frac{z}{x}$, перейдем к доказательству неравенства

$$2(p+q+r) - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right) - 3 \geq 0, \qquad (97)$$

где p, q, $r > 0$ и $pqr = 1$. Применим для доказательства последнего неравенства метод Штурма. В случае, когда все переменные p, q и r равны, неравенство реализуется в виде равенства. Пусть теперь среди этих чисел есть хотя бы два разных. Так как a – наибольшее из чисел a, b и c, то $(a+b)(c+a) \geq (b+c)^2$, откуда $\frac{a+b}{b+c} \geq \frac{b+c}{c+a}$, т.е. $p = \frac{x}{y} \geq \frac{y}{z} = q$. Тогда возможны три случая: 1) $q \leq r \leq p$, 2) $r \leq q \leq p$, 3) $q \leq p \leq r$.

В первом случае $p > 1$ и $q < 1$. Перейдем теперь от пары чисел (p, q) к паре (p', q') с сохранением их произведения так, чтобы $p' = 1$. Тогда $q' = pq$. Покажем, что при замене p и q числами p' и q' левая часть неравенства (97) уменьшится. Для этого найдем знак разности левых частей данного неравенства до и после замены:

$$\left(2(p+q+r)-\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right)\right)-\left(2(1+pq+r)-\left(1+\frac{1}{pq}+\frac{1}{r}\right)\right)=$$

$$=2(p+q-1-pq)-\frac{p+q-1-pq}{pq}=(p+q-1-pq)\left(2-\frac{1}{pq}\right)=$$

$$=\frac{2(p-1)(1-q)\left(pq-\frac{1}{2}\right)}{pq}. \quad (98)$$

Так как $a \geq c$, то $pq=\frac{x}{z}=\frac{a+b}{c+a}>\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$, следовательно, выражение (98) положительно.

Второй и третий случаи разбираются аналогично первому. Во втором случае используем тот факт, что $pr=\frac{z}{y}=\frac{c+a}{b+c}>\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$. В третьем случае используем неравенство $qr \geq pq > \frac{1}{2}$. Итак, неравенство (97) теперь достаточно доказать для случая, когда одна из переменных p, q и r равна 1. Пусть для определенности $r = 1$. Тогда нам достаточно будет доказать неравенство $2(p+q+1)-\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+1\right)-3 \geq 0$. Но поскольку $q=\frac{1}{p}$, то последнее неравенство равносильно верному неравенству $p+\frac{1}{p} \geq 2$ (см. задачу 1.4).

Глава 10. Условные неравенства

10.5. Обозначим два числа, о которых идет речь в условии, через x и y. Нам известно, что $xy > x + y$. Воспользуемся неравенством $(x+y)^2 \geq 4xy$. Имеем $(x+y)^2 \geq 4xy > 4(x+y)$, т.е. $x + y > 4$.

10.6. Из неравенства Коши для трех переменных имеем

$$\frac{2+x}{3}=\frac{1+1+x}{3} \geq \sqrt[3]{x}, \quad \frac{2+y}{3}=\frac{1+1+y}{3} \geq \sqrt[3]{y},$$

$$\frac{2+z}{3}=\frac{1+1+z}{3} \geq \sqrt[3]{z} .$$

Перемножая эти неравенства и учитывая, что $xyz = 1$, получаем неравенство, равносильное исходному.

10.7. Заметим, что $3=a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ (так как

$\dfrac{a^2+b^2}{2} \geq ab$ и т.д.). Поэтому $1+ab+1+bc+1+ca \leq 6$, откуда по неравенству между средними арифметическим и гармоническим (см. неравенство (9)) получаем

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca} \geq \frac{9}{1+ab+1+bc+1+ca} \geq \frac{9}{6}=\frac{3}{2}.$$

10.8. Заметим, что $1+ab=\dfrac{1+c}{c}$, $1+bc=\dfrac{1+a}{a}$ и $1+ca=\dfrac{1+b}{b}$. Отсюда, используя неравенство Коши для трех переменных, получаем, что

$$\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+ca}{1+c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1+ab}{1+a}\cdot\frac{1+bc}{1+b}\cdot\frac{1+ca}{1+c}}=$$

$$=3\sqrt[3]{\frac{1+c}{c(1+a)}\cdot\frac{1+a}{a(1+b)}\cdot\frac{1+b}{b(1+c)}}=3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}=3.$$

10.9. Из $b<c$ вытекает, что $\sqrt{b-x}<\sqrt{c-x}$ и $\sqrt{b-a}<\sqrt{c-a}$. Складывая эти неравенства, получаем $\sqrt{b-x}+\sqrt{b-a}<\sqrt{c-x}+\sqrt{c-a}$, откуда следует

$$\frac{a-x}{\sqrt{c-x}+\sqrt{c-a}}<\frac{a-x}{\sqrt{b-x}+\sqrt{b-a}}.$$

Уничтожая иррациональность в знаменателе, получим нужное неравенство.

10.10. Утверждение задачи следует из тождества

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{b}{a}-\frac{c}{b}-\frac{a}{c}=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}.$$

10.11*. Умножая неравенство $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}>a+b+c$ на общий знаменатель, получим равносильное неравенство $bc+ca+ab>(a+b+c)abc$. Воспользовавшись уже известным неравенством $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$ (см. задачу 1.25), получаем

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)>3(a+b+c)abc,$$

следовательно, $a+b+c>3abc$.

10.12*. Воспользуемся следующими неравенствами:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c} \geq \frac{4}{a+2b+c},\quad \frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \geq \frac{4}{b+2c+a},$$

$$\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b} \geq \frac{4}{c+2a+b},$$

которые следуют из уже доказанного неравенства $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}$ для положительных x и y (см. задачу 1.20). Сложив эти три неравенства, получим неравенство

$$\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}\geq\frac{4}{a+2b+c}+\frac{4}{b+2c+a}+\frac{4}{c+2a+b},$$

которое после сокращения на 2 и замены в знаменателях дробей выражения $a+b+$ с числом 1 превратится в нужное неравенство.

10.13*. Можно считать, что $a\geq b$ (случай $a\leq b$ аналогичен). Тогда $b^2\leq ab\leq a^2$, поэтому $a^2\geq a^2+b^2-ab\geq b^2$, откуда $a\geq c\geq b$. Значит, первый сомножитель в выражении $(a-c)(b-c)$ неотрицателен, а второй − неположителен. Поэтому произведение неположительно, что и требовалось доказать.

10.14*. Поскольку $x_1\geq x_2\geq\ldots\geq x_k$, для произвольного k имеем

$$1\geq\frac{x_1}{\sqrt{1}}+\frac{x_2}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{x_k}{\sqrt{k}}\geq x_k\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\geq$$

$$\geq x_k\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}}_{k\text{ слагаемых}}\right)=x_k\sqrt{k},$$

откуда $x_k\leq\frac{1}{\sqrt{k}}$ и $x_k^2\leq\frac{x_k}{\sqrt{k}}$. Значит, $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\leq\frac{x_1}{\sqrt{1}}+\frac{x_2}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{x_n}{\sqrt{n}}=1$.

10.15*. Рассмотрим равенство $(a+b+c)^2=9$. Тогда $ab+bc+ca=\frac{9-a^2-b^2-c^2}{2}$. Следовательно, нужно доказать, что

$$2\sqrt{a}+2\sqrt{b}+2\sqrt{c}+a^2+b^2+c^2\geq 9.$$

Заметим, что $2\sqrt{a}+a^2\geq 3a$. Действительно, применив неравенство Коши для трех переменных, получаем

$$2\sqrt{a}+a^2=\sqrt{a}+\sqrt{a}+a^2\geq 3\sqrt[3]{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot a^2}=3a.$$

Аналогично получаем $2\sqrt{b}+b^2\geq 3b$ и $2\sqrt{c}+c^2\geq 3c$, откуда

$$2\sqrt{a}+2\sqrt{b}+2\sqrt{c}+a^2+b^2+c^2\geq 3(a+b+c)=9.$$

10.16*. Если среди чисел x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 нечетное число отрицательных или есть 0, то неравенство очевидно. Пусть отрицательных чисел два или четыре. Меняя, если нужно, знаки у всех чисел, можно добиться того, что ровно два числа будут отрицательными. Пусть для определенности это числа x_1 и x_2. Положим $y_k = |x_k|$. Тогда $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2 + y_6^2 = 6$ и $y_1 + y_2 = y_3 + y_4 + y_5 + y_6$. Обозначим последнюю сумму через s. По неравенству о средних для двух чисел имеем $y_1y_2 \le \left(\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)^2 = \dfrac{s^2}{4}$. Аналогично получаем $y_3y_4y_5y_6 \le$ $\le \left(\dfrac{y_3+y_4+y_5+y_6}{4}\right)^4 = \dfrac{s^4}{4^4}$. Значит, $y_1y_2y_3y_4y_5y_6 \le \dfrac{s^6}{4^5}$. С другой стороны, $2\left(y_1^2 + y_2^2\right) \ge \left(y_1 + y_2\right)^2 = s^2$ и $4\left(y_3^2 + y_4^2 + y_5^2 + y_6^2\right) \ge \left(y_1 + y_2 + y_3 + y_4\right)^2 = s^2$ (следует из того, что среднее квадратическое не меньше среднего арифметического). Таким образом, $6 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2 + y_6^2 \ge \dfrac{s^2}{2} + \dfrac{s^2}{4} =$ $= \dfrac{3s^2}{4}$. Поэтому $s^2 \le 8$ и $x_1x_2x_3x_4x_5x_6 = y_1y_2y_3y_4y_5y_6 \le$ $\le \dfrac{s^6}{4^5} \le \dfrac{8^3}{4^5} = \dfrac{1}{2}$.

10.17*. Вначале докажем, что

$$x + y^2 \ge x^2 + y^3. \qquad (99)$$

Допустим противное: пусть $x + y^2 < x^2 + y^3$, тогда, складывая это неравенство с неравенством $x^3 + y^4 \le x^2 + y^3$, получим $\left(x + x^3\right) + \left(y^2 + y^4\right) < 2x^2 + 2y^3$, что противоречит неравенствам $x + x^3 \ge 2x^2$ и $y^2 + y^4 \ge 2y^3$.

Из (99) получаем неравенство $x + y^2 \ge x^2 + y^3 \ge x^3 + y^4$, откуда следует, что $2x + 2y^2 \ge x^2 + y^3 + x^3 + y^4$. Замечая, что $\left(1 + x^2\right) + \left(1 + y^4\right) \ge 2x + 2y^2 \ge x^2 + y^3 + x^3 + y^4$, получаем неравенство $2 + x^2 + y^4 \ge x^2 + y^3 + x^3 + y^4$, равносильное требуемому.

10.18*. Рассмотрим две конечные последовательности $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-a_1}}, \dfrac{1}{\sqrt{1-a_2}}, \ldots, \dfrac{1}{\sqrt{1-a_n}}\right)$. Они одномонотонны, следовательно, для них справедливо неравенство Чебышёва (см. задачу 8.3), из которого следует, что

$$\frac{a_1}{\sqrt{1-a_1}}+\frac{a_2}{\sqrt{1-a_2}}+\ldots+\frac{a_n}{\sqrt{1-a_n}}\geq$$

$$\geq\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)\cdot\frac{\frac{1}{\sqrt{1-a_1}}+\frac{1}{\sqrt{1-a_2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1-a_n}}}{n}.$$

Используя равенство $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$ и неравенство о средних

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geq\left(\frac{x_1^{-2}+x_2^{-2}+\ldots+x_n^{-2}}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

(см. теорему 2.1), получаем, что

$$\frac{a_1}{\sqrt{1-a_1}}+\frac{a_2}{\sqrt{1-a_2}}+\ldots+\frac{a_n}{\sqrt{1-a_n}}\geq$$

$$\geq\frac{\frac{1}{\sqrt{1-a_1}}+\frac{1}{\sqrt{1-a_2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1-a_n}}}{n}\geq$$

$$\geq\left(\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1-a_1}}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{\sqrt{1-a_2}}\right)^{-2}+\ldots+\left(\frac{1}{\sqrt{1-a_n}}\right)^{-2}}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(\frac{\left(1-a_1\right)+\left(1-a_2\right)+\ldots+\left(1-a_n\right)}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

10.19*. Используем индукцию по n. Проверим базу: при $n=1$ неравенство верно. Предположим, что оно верно при $n=k$. Докажем, что тогда оно верно и при $n=k+1$. Имеем

$$\left(a_1+a_2+\ldots+a_k+a_{k+1}\right)^2=$$

$$=a_{k+1}^2+2a_{k+1}\left(a_1+a_2+\ldots+a_k\right)+\left(a_1+a_2+\ldots+a_k\right)^2\leq$$

$$\leq a_{k+1}^2+2a_{k+1}\left(a_1+a_2+\ldots+a_k\right)+\left(a_1^3+a_2^3+\ldots+a_k^3\right).$$

Достаточно проверить, что $a_{k+1}^3\geq a_{k+1}^2+2a_{k+1}\left(a_1+a_2+\ldots+a_k\right)$, т.е. что

$$a_{k+1}^2 - a_{k+1} \geq 2\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_k\right).$$

Для доказательства последнего утверждения заметим, что

$$a_{i+1} + a_i \leq \left(a_{i+1} + a_i\right)\left(a_{i+1} - a_i\right) = a_{i+1}^2 - a_i^2 .$$

Суммируя полученные неравенства по i от 1 до k и прибавляя неравенство $a_1 \leq a_1^2$, получаем

$$a_{k+1} + 2\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_k\right) \leq a_1^2 + \left(a_2^2 - a_1^2\right) + \ldots + \left(a_{k+1}^2 - a_k^2\right) = a_{k+1}^2,$$

что и требовалось.

10.20*. Докажем по индукции, что для всех k от 1 до n верно утверждение $\left(1 + a_1\right)\left(1 + a_2\right)\ldots\left(1 + a_k\right) < 1 + 2\left(a_1 + \ldots + a_k\right)$. Для $k = 1$ утверждение очевидно ($1 + a_1 < 1 + 2a_1$, так как a_1 положительно). Сделаем шаг индукции. Пусть для некоторого k, где $k < n$, верно $\left(1 + a_1\right)\left(1 + a_2\right)\ldots\left(1 + a_k\right) < 1 + 2\left(a_1 + \ldots + a_k\right)$. Домножим это неравенство на $1 + a_{k+1}$. Получим

$$\left(1 + a_1\right)\left(1 + a_2\right)\ldots\left(1 + a_{k+1}\right) < \left(1 + 2\left(a_1 + \ldots + a_k\right)\right)\left(1 + a_{k+1}\right) <$$
$$< 1 + 2\left(a_1 + \ldots + a_k\right) + a_{k+1}\left(1 + 2 \cdot \frac{1}{2}\right) = 1 + 2\left(a_1 + \ldots + a_{k+1}\right).$$

Утверждение доказано. При $k = n$ имеем

$$\left(1 + a_1\right)\left(1 + a_2\right)\ldots\left(1 + a_n\right) < 1 + 2\left(a_1 + \ldots + a_n\right) \leq 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2,$$

что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Агаханов Н.Х.* Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993–2006: Окружной и финальный этапы / *Н.Х.Агаханов*, *И.И.Богданов*, *П.А.Кожевников* и др. Под ред. Н.Х.Агаханова. – М.: МЦНМО, 2007. – 472 с.

2. *Агаханов Н.Х.* Математика. Всероссийские олимпиады. Вып. 1 / *Н.Х.Агаханов*, *И.И.Богданов*, *П.А.Кожевников* и др. Под общ. ред. С.И.Демидовой, И.И.Колисниченко. – М.: Просвещение, 2008. – 192 с. – (Пять колец).

3. *Агаханов Н.Х.* Математика. Всероссийские олимпиады. Вып. 2 / *Н.Х.Агаханов*, *О.К.Подлипский*. Под общ. ред. С.И.Демидовой, И.И.Колисниченко. – М.: Просвещение, 2009. – 159 с. – (Пять колец).

4. *Алфутова Н.Б.* Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ / *Н.Б.Алфутова*, *А.В. Устинов.* – М.: МЦНМО, 2002. – 264 с.

5. *Васильев Н.Б.* Задачи Всесоюзных математических олимпиад / *Н.Б.Васильев*, *А.А. Егоров.* – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – (Б-ка мат. кружка; вып. 18). – 288 с.

6. *Гальперин Г.А.* Московские математические олимпиады: Кн. для учащихся / *Г.А.Гальперин*, *А.К.Толпыго*. Под ред. А.Н.Колмогорова. – М.: Просвещение, 1986. – 303 с.

7. *Генкин С.А.* Ленинградские математические кружки: пособие для внеклассной работы / *С.А.Генкин*, *И.В.Итенберг*, *Д.В. Фомин*. – Киров: АСА, 1994. – 272 с.

8. *Гомонов С.А.* Замечательные неравенства: способы получения и примеры применения. 10–11 кл.: учебное пособие / *С.А.Гомонов*. – М.: Дрофа, 2006. – 254 с.

9. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу / *Б.П.Демидович.* – М.: Наука, 1977. – 528 с.

10. *Седракян Н.М.* Неравенства. Методы доказательства / Пер. с арм. Г.В.Григорян / *Н.М.Седракян*, *А.М.Авоян*. – М.: Физматлит, 2002. – 256 с.

11. *Толпыго А.К.* Тысяча задач Международного математического Турнира городов / *А.К.Толпыго*. – М.: МЦНМО, 2010. – 488 с.

12. *Федоров Р.М.* Московские математические олимпиады 1993–2005 г. / *Р.М.Федоров*, *А.Я.Канель-Белов*, *А.К.Ковальджи* и др. Под ред. В. М. Тихомирова. – М.: МЦНМО, 2006. – 456 с.

13. *Беккенбах Э.* Неравенства / Пер. с англ. Г.И.Басс, В.И.Левин, Г.А.Шадрин / *Э.Беккенбах*, *Р.Беллман*. Под ред. В.И.Левина. – М.: Мир, 1965. – 276 с.

14. Задачник «Кванта» / «Квант». 1973. № 8. С.60.
15. *Курляндчик Л.*, *Файбусович А.* История одного неравенства / / «Квант». 1991. № 4. С. 14–18.
16. *Ижболдин* О., *Курляндчик Л.* Неравенство Иенсена / / «Квант». 1990. № 4. С. 57–62.
17. http://olympiad.mccme.ru/mmo/2008/okrug/8-10.pdf.
18. http://dxdy.ru/topic81369-105.html
19. http://dxdy.ru/topic62769.html
20. http://dxdy.ru/topic6274.html
21. http://dxdy.ru/post612442.html#p612442
22. http://k2pi.net.vn/showthread.php?t=6002
23. http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=2233836#p2233836
24. Материалы Кировской ЛМШ.

Приложение к журналу «Квант» №3/2016

Александр Владимирович Арбит

НЕРАВЕНСТВА И ОСНОВНЫЕ СПОСОБЫ ИХ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Часть 1

Редактор *А.Ю.Котова*
Обложка *А.Е.Пацхверия*
Макет и компьютерная верстка *Е.В.Морозова*
Компьютерная группа *М.Н.Грицук, Е.А.Митченко*

Формат 84×108 1/32. Бум. офсетная. Гарнитура кудряшевская
Печать офсетная. Объем 5,25 печ.л. Тираж: 1-й завод 900 экз.
Заказ №

119296 Москва, Ленинский пр., 64-А, «Квант»
Тел.: (495)930-56-48, e-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано «ТДДС-СТОЛИЦА-8»
Тел.: 8(495)363-48-86, http://capitalpress.ru

ВЫШЛИ ИЗ ПЕЧАТИ КНИГИ СЕРИИ «БИБЛИОТЕЧКА «КВАНТ»

1. *М.П.Бронштейн*. Атомы и электроны
2. *М.Фарадей*. История свечи
3. *О.Оре*. Приглашение в теорию чисел
4. Опыты в домашней лаборатории
5. *И.Ш.Слободецкий*, *Л.Г.Асламазов*. Задачи по физике
6. *Л.П.Мочалов*. Головоломки
7. *П.С.Александров*. Введение в теорию групп
8. *В.Г.Штейнгауз*. Математический калейдоскоп
9. Замечательные ученые
10. *В.М.Глушков*, *В.Я.Валах*. Что такое ОГАС?
11. *Г.И.Копылов*. Всего лишь кинематика
12. *Я.А.Смородинский*. Температура
13. *А.Е.Карпов*, *Е.Я.Гик*. Шахматный калейдоскоп
14. *С.Г.Гиндикин*. Рассказы о физиках и математиках
15. *А.А.Боровой*. Как регистрируют частицы
16. *М.И.Каганов*, *В.М.Цукерник*. Природа магнетизма
17. *И.Ф.Шарыгин*. Задачи по геометрии: планиметрия
18. *Л.В.Тарасов*, *А.Н.Тарасова*. Беседы о преломлении света
19. *А.Л.Эфрос*. Физика и геометрия беспорядка
20. *С.А.Пикин*, *Л.М.Блинов*. Жидкие кристаллы
21. *В.Г.Болтянский*, *В.А.Ефремович*. Наглядная топология
22. *М.И.Башмаков*, *Б.М.Беккер*, *В.М.Гольховой*. Задачи по математике: алгебра и анализ
23. *А.Н.Колмогоров*, *И.Г.Журбенко*, *А.В.Прохоров*. Введение в теорию вероятностей
24. *Е.Я.Гик*. Шахматы и математика
25. *М.Д.Франк-Каменецкий*. Самая главная молекула
26. *В.С.Эдельман*. Вблизи абсолютного нуля
27. *С.Р.Филонович*. Самая большая скорость
28. *Б.С.Бокштейн*. Атомы блуждают по кристаллу
29. *А.В.Бялко*. Наша планета – Земля
30. *М.Н.Аршинов*, *Л.Е.Садовский*. Коды и математика
31. *И.Ф.Шарыгин*. Задачи по геометрии: стереометрия
32. *В.А.Займовский*, *Т.Л.Колупаева*. Необычные свойства обычных металлов
33. *М.Е.Левинштейн*, *Г.С.Симин*. Знакомство с полупроводниками
34. *В.Н.Дубровский*, *Я.А.Смородинский*, *Е.Л.Сурков*. Релятивистский мир
35. *А.А.Михайлов*. Земля и ее вращение

36. *А.П.Пурмаль, Е.М.Слободецкая, С.О.Травин.* Как превращаются вещества
37. *Г.С.Воронов.* Штурм термоядерной крепости
38. *А.Д.Чернин.* Звезды и физика
39. *В.Б.Брагинский, А.Г.Полнарев.* Удивительная гравитация
40. *С.С.Хилькевич.* Физика вокруг нас
41. *Г.А.Звенигородский.* Первые уроки программирования
42. *Л.В.Тарасов.* Лазеры: действительность и надежды
43. *О.Ф.Кабардин, В.А.Орлов.* Международные физические олимпиады школьников
44. *Л.Е.Садовский, А.Л.Садовский.* Математика и спорт
45. *Л.Б.Окунь.* α, β, γ ... Z: элементарное введение в физику элементарных частиц
46. *Я.Е.Гегузин.* Пузыри
47. *Л.С.Марочник.* Свидание с кометой
48. *А.Т.Филиппов.* Многоликий солитон
49. *К.Ю.Богданов.* Физик в гостях у биолога
50. Занимательно о физике и математике
51. *Х.Рачлис.* Физика в ванне
52. *В.М.Липунов.* В мире двойных звезд
53. *И.К.Кикоин.* Рассказы о физике и физиках
54. *Л.С.Понтрягин.* Обобщения чисел
55. *И.Д.Данилов.* Секреты программируемого микрокалькулятора
56. *В.М.Тихомиров.* Рассказы о максимумах и минимумах
57. *А.А.Силин.* Трение и мы
58. *Л.А.Ашкинази.* Вакуум для науки и техники
59. *А.Д.Чернин.* Физика времени
60. Задачи московских физических олимпиад
61. *М.Б.Балк, В.Г.Болтянский.* Геометрия масс
62. *Р.Фейнман.* Характер физических законов
63. *Л.Г.Асламазов, А.А.Варламов.* Удивительная физика
64. *А.Н.Колмогоров.* Математика – наука и профессия
65. *М.Е.Левинштейн, Г.С.Симин.* Барьеры: от кристалла до интегральной схемы
66. *Р.Фейнман.* КЭД – странная теория света и вещества
67. *Я.Б.Зельдович, М.Ю.Хлопов.* Драма идей в познании природы
68. *И.Д.Новиков.* Как взорвалась Вселенная
69. *М.Б.Беркинблит, Е.Г.Глаголева.* Электричество в живых организмах
70. *А.Л.Стасенко.* Физика полета
71. *А.С.Штейнберг.* Репортаж из мира сплавов
72. *В.Р.Полищук.* Как исследуют вещества
73. *Л.Кэрролл.* Логическая игра
74. *А.Ю.Гросберг, А.Р.Хохлов.* Физика в мире полимеров
75. *А.Б.Мигдал.* Квантовая физика для больших и маленьких

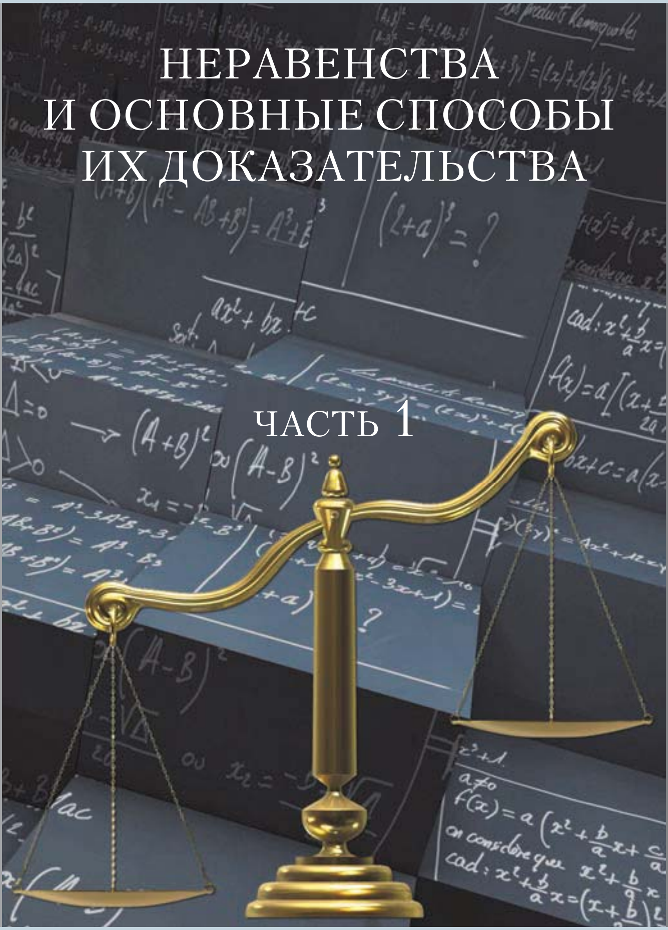
76. *В.С.Гетман*. Внуки Солнца
77. *Г.А.Гальперин*, *А.Н.Земляков*. Математические бильярды
78. *В.Е.Белонучкин*. Кеплер, Ньютон и все-все-все...
79. *С.Р.Филонович*. Судьба классического закона
80. *М.П.Бронштейн*. Солнечное вещество
81. *А.И.Буздин*, *А.Р.Зильберман*, *С.С.Кротов*. Раз задача, два задача...
82. *Я.И.Перельман*. Знаете ли вы физику?
83. *Р.Хонсбергер*. Математические изюминки
84. *Ю.Р.Носов*. Дебют оптоэлектроники
85. *Г.Гамов*. Приключения мистера Томпкинса
86. *И.Ш.Слободецкий*, *Л.Г.Асламазов*. Задачи по физике (2-е изд.)
87. Физика и...
88. *А.В.Спивак*. Математический праздник
89. *Л.Г.Асламазов*, *И.Ш.Слободецкий*. Задачи и не только по физике
90. *П.Гнэдиг*, *Д.Хоньек*, *К.Райли*. Двести интригующих физических задач
91. *А.Л.Стасенко*. Физические основы полета
92. Задачник «Кванта». Математика. Часть 1
93. Математические турниры имени А.П.Савина
94. *В.И.Белотелов*, *А.К.Звездин*. Фотонные кристаллы и другие метаматериалы
95. Задачник «Кванта». Математика. Часть 2
96. Олимпиады «Интеллектуальный марафон». Физика
97. *А.А.Егоров*, *Ж.М.Раббот*. Олимпиады «Интеллектуальный марафон». Математика
98. *К.Ю.Богданов*. Прогулки с физикой
99. *П.В.Блиох*. Радиоволны на земле и в космосе
100. *Н.Б.Васильев*, *А.П.Савин*, *А.А.Егоров*. Избранные олимпиадные задачи. Математика
101. У истоков моей судьбы...
102. *А.В.Спивак*. Арифметика
103. *Я.А.Смородинский*. Температура (3-е изд.)
104. *А.Н.Васильев*. История науки в коллекции монет
105. *И.Ф.Акулич*. Королевские прогулки
106. Исаак Константинович Кикоин в жизни и в «Кванте»
107. *Г.С.Голицын*. Макро- и микромиры и гармония
108. *П.С.Александров*. Введение в теорию групп (2-е изд.)
109. *А.В.Спивак*. Арифметика-2
110. *П.Г.Крюков*. Лазер – новый источник света
111. *А.Б.Сосинский*. Узлы. Хронология одной математической теории
112. *А.П.Пятаков*, *П.П.Григал*. Лаборатория на коленке
113. *А.А.Заславский*. Олимпиады имени И.Ф.Шарыгина

114. *С.В.Коновалихин*. Сборник качественных задач по физике
115. *Е.Я.Гик*. Математика и шахматы
116. *Л.К.Белопухов*. Физика внезапного
117. *Н.Б.Васильев*, *А.А.Егоров*. Задачи всесоюзных математических олимпиад. Часть 1
118. Задачник «Кванта». Физика. Часть 1
119. *Н.Б.Васильев*, *А.А.Егоров*. Задачи всесоюзных математических олимпиад. Часть 2
120. Задачник «Кванта». Физика. Часть 2
121. *Н.Б.Васильев, В.Л.Гутенмахер, Ж.М.Раббот, А.Л.Тоом.* Заочные математические олимпиады
122. *А.З.Долгинов.* Строение материи: от атомов до Вселенной
123. Задачник «Кванта». Физика. Часть 3
124. *А.Толпыго*. 130 нестандартных задач
125. *Н.Б.Васильев*. Статьи из журнала «Квант». Часть 1
126. *Н.Б.Васильев*. Статьи из журнала «Квант». Часть 2
127. *Г.Е.Горелик*. Новые слова науки – от маятника Галилея до квантовой гравитации
128. *Е.Я.Гик*. Компьютерные шахматы
129. *М.И.Каганов*. Физика глазами физика. Часть 1
130. *М.И.Каганов*. Физика глазами физика. Часть 2
131. Колмогоровской школе – пятьдесят. Сборник статей. Часть 1
132. Колмогоровской школе – пятьдесят. Сборник статей. Часть 2
133. *К.Ю.Богданов.* Физик в гостях у биолога
134. *А.А.Заславский.* Олимпиады имени И.Ф.Шарыгина (2010–2014)
135. *А.Н.Колмогоров, И.Г.Журбенко, А.В.Прохоров.* Введение в теорию вероятностей (3-е изд.)
136. *Л.А.Ашкинази.* Рекорды и пределы, или Введение в экстремальное материаловедение

Индекс 90964

НЕРАВЕНСТВА И ОСНОВНЫЕ СПОСОБЫ ИХ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

ЧАСТЬ 1



ПРИЛОЖЕНИЕ К ЖУРНАЛУ КВАНТ

№ 3/2016